Μηχανική Ι – Εργασία #3

Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017 Ν. Βλαχάκης

---

1. Ο καταπέλτης απονήωσης είναι ένας μηχανισμός ο οποίος δίνει ταχύτητα στα αεροπλάνα πάνω στα αεροπλανοφόρα κι έτσι μπορούν να απονηώνονται χωρίς να χρειάζονται μεγάλο μήκος διαδρόμου. Θέλουμε να μελετήσουμε την ευθύγραμμη οριζόντια κίνηση του αεροπλάνου πριν απονηωθεί. Το αεροπλάνο αρχικά βρίσκεται ακίνητο στην αρχή του άξονα κίνησης x. Εκτός του βάρους του mg και της κάθετης αντίδρασης από το αεροπλανοφόρο, δέχεται την δύναμη από τον καταπέλτη $F_0(1-x/\beta)\hat{x}$, δύναμη από τους κινητήρες $F_e\hat{x}$, δύναμη αντίστασης αέρα $-\frac{1}{2}C_D\rho S_D v^2\hat{x}$ και δύναμη ανύψωσης $\frac{1}{2}C_L\rho S_L v^2$ (με φορά προς τα πάνω). Στα παραπάνω F_0 και F_e είναι θετικές σταθερές, β είναι το μήκος του διαδρόμου, C_D και C_L οι συντελεστές αντίστασης και ανύψωσης, ρ η πυκνότητα του αέρα, S_D η επιφάνεια του αεροπλάνου κάθετα στην κίνηση, S_L η επιφάνεια των φτερών και v η ταχύτητα (το μέτρο της).

(α) Ποια η επιτάχυνση σαν συνάρτηση θέσης και ταχύτητας; Ποια η μέγιστη τιμής της;

(β) Γράψτε την διαφορική εξίσωση που δίνει την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης και λύστε την.

Υπόδειξη: Η διαφορική εξίσωση $v\dfrac{dv}{dx} = c_1 - c_2v^2 - c_3x$, με c_1, c_2, c_3 σταθερές, μπορεί να γραφεί σαν γραμμική, μη ομογενής $\dfrac{df}{dx} + 2c_2f = 2c_1 - 2c_3x$, όπου $f = v^2$. Η τελευταία έχει γενική λύση $f = De^{-2c_2x} - \dfrac{c_3}{c_2}x + \dfrac{c_3}{2c_2^2} + \dfrac{c_1}{c_2}$, όπου D σταθερά ολοκλήρωσης.

(γ) Πόση πρέπει να είναι τουλάχιστον η επιφάνεια των φτερών S_L ώστε το αεροπλάνο να απονηωθεί στο τέλος του διαδρόμου;

(δ) Έστω ότι αγνοούμε την δύναμη αντίστασης αέρα.

(δ$_1$) Βρείτε μέσω θεωρήματος μεταβολής κινητικής ενέργειας την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης.

(δ$_2$) Συμφωνεί το αποτέλεσμα με το όριο του αποτελέσματος του ερωτήματος (β) για $C_D \to 0$;

(δ$_3$) (Προαιρετικά:) Ποια είναι η θέση συναρτήσει του χρόνου; Σε πόσο χρόνο το αεροπλάνο φτάνει στο τέλος του διαδρόμου;

Μπορείτε να απαντήσετε ολοκληρώνοντας την $\dot{x} = v(x)$, αλλά μάλλον είναι ευκολότερο να λύσετε την διαφορική $m\ddot{x} = \Sigma F_x$, η οποία γράφεται $\ddot{x} + c_3x = c_1$ και έχει γενική λύση (για θετικό c_3) $x = \dfrac{c_1}{c_3} + D_1\sin\left(\sqrt{c_3}\,t\right) + D_2\cos\left(\sqrt{c_3}\,t\right)$.

(ε) Έστω $m = 20000$ kg, $g = 9.8$ m/s^2, $F_0 = 10^6$ N, $F_e = 10^5$ N, $\beta = 100$ m, $\rho = 1.2$ kg/m^3, $C_D = 0.05$, $C_L = 1.1$, $S_D = 10$ m^2.

(ε$_1$) Πόσα g είναι η μέγιστη επιτάχυνση που βρήκατε στο ερώτημα (α);

(ε$_2$) Ποια η ταχύτητα στο τέλος του διαδρόμου; Τι σφάλμα θα κάναμε αν αγνοούσαμε τη δύναμη αντίστασης αέρα και τη δύναμη προώθησης από τους κινητήρες του αεροπλάνου;

(ε$_3$) Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι η επιφάνεια S_L που βρήκατε στο ερώτημα (γ);

---

2. Έστω κίνηση μάζας m σε κατακόρυφο επίπεδο xy μέσα σε ομογενή βαρύτητα $\vec{g} = -g\hat{y}$, υπό την επίδραση αντίστασης ανάλογης του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλ. $\vec{F}_a = -m\lambda v\vec{v}$, όπου $v = |\vec{v}|$ και λ σταθερά.

Αν $\vartheta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι η γωνία μεταξύ $\vec{v}$ και $\hat{x}$ (δηλ. $v_x = v\cos\vartheta$, $v_y = v\sin\vartheta$), δείξτε ότι οι συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα δίνουν $\dot{\vartheta} = -\dfrac{g\cos\vartheta}{v}$ και $\dot{v} = -g\sin\vartheta - \lambda v^2$.

Δείξτε επίσης ότι η ποσότητα $\dfrac{g}{v^2\cos^2\vartheta} + \lambda\dfrac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} + \lambda\ln\dfrac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$ είναι σταθερή.
