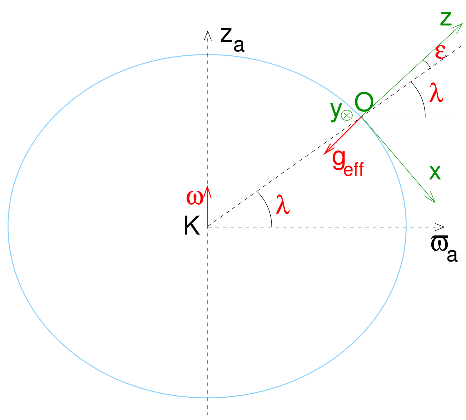
Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016 Ν. Βλαχάκης

---

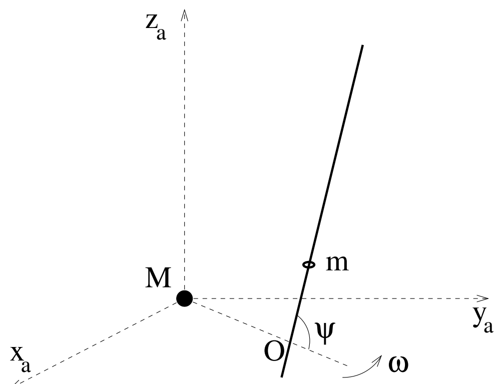
1. Σώμα μάζας m κινείται χωρίς τριβή πάνω σε ένα μεγάλο κομμάτι πάγου, σε τόπο γεωγραφικού πλάτους λ. Αρχικά βρίσκεται σε σημείο Ο και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0$ με φορά που σχηματίζει προσανατολισμένη γωνία ϕ_0 με την κατεύθυνση προς το νότο, μετρούμενη από το νότο προς την ανατολή. Η επιφάνεια του πάγου είναι τέλεια οριζόντια, με την έννοια ότι είναι κάθετη στην επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g}_{\rm eff}$ η οποία προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη το βάρος και την φυγόκεντρο λόγω της περιστροφής της Γης.

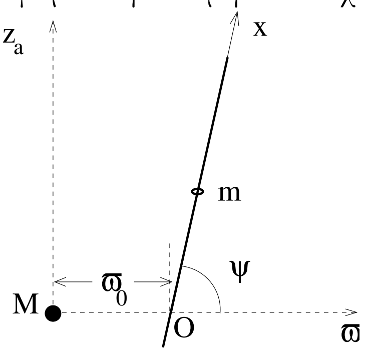


(α) Θεωρώντας την επιφάνεια του πάγου επίπεδη, παρότι καθορίζεται σαν κάθετη στο $\vec{g}_{\rm eff}$ που αλλάζει ελαφρώς από θέση σε θέση, δείξτε ότι η κίνηση του σώματος ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή το Ο περιγράφεται από την $\vec{a} = -2\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}$, όπου $\vec{\omega}_\perp$ η συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της Γης κάθετα στην επιφάνεια του πάγου.
(β) Δείξτε ότι το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση πάνω στον πάγο και υπολογίστε την ακτίνα της. Εφαρμόστε για ρεαλιστικές ταχύτητες της επιλογής σας. Ποια η ακτίνα του κύκλου;
(γ) Αν στο σώμα ασκείται επιπλέον αντίσταση κύλισης $-km\vec{v}$ (όπου k θετική σταθερά), ποια η κίνησή του; Που καταλήγει σε μεγάλους χρόνους;
Υπόδειξη: Βρείτε διαφορική εξίσωση για την μεταβλητή $\zeta = x + iy$ και επιλύστε την.
(δ) Το ότι αμελήσαμε την καμπυλότητα της επιφάνειας του πάγου (από σημείο σε σημείο η φορά του $\vec{g}_{\rm eff}$ αλλάζει) ισοδυναμεί με το να θεωρούμε όρους $\omega^2 r$ αμελητέους στην επιτάχυνση. Κρίνοντας από τα αποτελέσματα που βρήκατε είναι σωστό που αγνοήσαμε αυτούς τους όρους;

---

2. Δαχτυλίδι μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο ευθύγραμμο σύρμα του σχήματος. Το σύρμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z_a με γωνιακή ταχύτητα ω, σχηματίζει οξεία γωνία ψ με το επίπεδο $x_a y_a$ και η τομή του O με το επίπεδο αυτό απέχει απόσταση ϖ_0 από την αρχή των αξόνων M. (Το σύρμα βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που σχηματίζει ο άξονας z_a και το τμήμα MO.) Στο σημείο M υπάρχει μάζα $M = \omega^2 \varpi_0^3 / G$ που ασκεί βαρυτική δύναμη στο δαχτυλίδι.





(α) Μελετήστε την κίνηση στον περιστρεφόμενο άξονα Ox. Συγκεκριμένα, βρείτε την ολική δυναμική ενέργεια και γράψτε το ολοκλήρωμα «ενέργειας» που αποτελεί και την εξίσωση κίνησης.
(β) Δείξτε ότι το σημείο $x = 0$ είναι σημείο ισορροπίας και μελετήστε την ευστάθεια κινήσεων γύρω από αυτό. Στην περίπτωση μικρών ταλαντώσεων βρείτε την περίοδό τους.

ΛΥΣΕΙΣ:

1. (α) Η κίνηση του σώματος στο μη αδρανειακό σύστημα $Oxyz$ του σχήματος (με τον άξονα x πάνω στην επιφάνεια του πάγου με φορά προς το νότο, τον άξονα y επίσης πάνω στην επιφάνεια του πάγου με φορά προς την ανατολή και τον άξονα z προς το ζενίθ του τόπου) περιγράφεται από $\vec{r} = x\hat{x}+y\hat{y}$, $\vec{v} = \dot{x}\hat{x}+\dot{y}\hat{y}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}+\ddot{y}\hat{y}$. Ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\vec{a} = \dfrac{\vec{N}}{m}+\vec{g}-\vec{a}_0-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2\vec{\omega}\times\vec{v}$, όπου $\vec{N} = N\hat{z}$ η κάθετη αντίδραση, η $\vec{g}$ έχει φορά προς το κέντρο της Γης και $\vec{a}_0 = -\omega^2 R\cos\lambda\hat{\varpi}_a$ είναι η επιτάχυνση του σημείου O, το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική τροχιά ακτίνας $R\cos\lambda$ με γωνιακή ταχύτητα ω ($-\vec{a}_0 = \omega^2 R\cos\lambda\hat{\varpi}_a$ είναι η φυγόκετρος επιτάχυνση στο O λόγω της περιστροφής της Γης). Η συνισταμένη των $\vec{g}$, $-\vec{a}_0$ και φυγόκεντρου δίνει την επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g}_{\rm eff} = \vec{g}-\vec{a}_0-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ η οποία έχει φορά $-\hat{z}$ και σχηματίζει μικρή γωνία ε με την $\vec{g}$.
Είναι $\vec{g} = -g\cos\lambda\hat{\varpi}_a - g\sin\lambda\hat{z}_a$ οπότε στο σημείο O ισχύει $\vec{g}_{\rm eff} = \vec{g}-\vec{a}_0 = -\left(g-\omega^2 R\right)\cos\lambda\hat{\varpi}_a - g\sin\lambda\hat{z}_a$ και η γωνία μεταξύ των $\vec{g}$ και $\vec{g}_{\rm eff}$ μπορεί να βρεθεί μέσω του εσωτερικού γινομένου $\cos\varepsilon = \dfrac{\vec{g}\cdot\vec{g}_{\rm eff}}{|\vec{g}|\,|\vec{g}_{\rm eff}|} = \dfrac{1-\dfrac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda}{\sqrt{1-2\dfrac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda+\left(\dfrac{\omega^2 R}{g}\right)^2\cos^2\lambda}}$, ή μέσω του εξωτερικού γινομένου

$$\sin\varepsilon = \frac{|\vec{g}\times\vec{g}_{\rm eff}|}{|\vec{g}|\,|\vec{g}_{\rm eff}|} = \frac{|\vec{g}\times\vec{a}_0|}{|\vec{g}|\,|\vec{g}_{\rm eff}|} = \frac{|g\sin\lambda\hat{z}_a\times\omega^2 R\cos\lambda\hat{\varpi}_a|}{|\vec{g}|\,|\vec{g}_{\rm eff}|} = \frac{\dfrac{\omega^2 R}{g}\sin\lambda\cos\lambda}{\sqrt{1-2\dfrac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda+\left(\dfrac{\omega^2 R}{g}\right)^2\cos^2\lambda}}.$$

Αφού $\dfrac{\omega^2 R}{g} = 3\times 10^{-3} \ll 1$ (θέτοντας $\omega = \dfrac{2\pi}{24\ \text{ώρες}} = \dfrac{2\pi}{24\times 3600}$ rad s^{-1}, $R = 6.4\times 10^6$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}), το ανάπτυγμα Taylor της προηγούμενης δίνει $\varepsilon \approx \dfrac{\omega^2 R}{g}\sin\lambda\cos\lambda \ll 1$. Τα υπόλοιπα σημεία της επιφάνειας του πάγου έχουν ελαφρώς διαφορετικό λ και η κάθετη στην επιφάνεια $\vec{g}_{\rm eff}$ έχει ελαφρώς διαφορετική διεύθυνση, κάτι που αγνοούμε αφού την θεωρούμε επίπεδη. (Ουσιαστικά η φορά του $\vec{g}_{\rm eff}$ καθορίζει το σχήμα της επιφάνειας της Γης, γι' αυτό δεν έχει σφαιρικό σχήμα, αλλά ελλειψοειδές. Για να είναι αυτοσυνεπής ο υπολογισμός πρέπει να υπολογιστεί το $\vec{g}$ ελλειψοειδούς, το οποίο δεν έχει φορά προς το κέντρο K.)
Η Coriolis επιτάχυνση γράφεται $-2\vec{\omega}\times\vec{v} = -2\vec{\omega}_\perp\times\vec{v}-2\vec{\omega}_\parallel\times\vec{v}$, όπου $\vec{\omega}_\perp = (\vec{\omega}\cdot\hat{z})\hat{z} = \omega\sin\lambda\hat{z}$ η συνιστώσα της $\vec{\omega}$ κάθετα στην επιφάνεια του πάγου και $\vec{\omega}_\parallel = \vec{\omega}-\vec{\omega}_\perp = -\omega\cos\lambda\hat{x}$ η συνιστώσα της $\vec{\omega}$ πάνω στην επιφάνεια του πάγου. Η συνιστώσα της $-2\vec{\omega}_\perp\times\vec{v} = 2\omega\sin\lambda(\dot{y}\hat{x}-\dot{x}\hat{y})$ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο κίνησης, ενώ η $-2\vec{\omega}_\parallel\times\vec{v} = 2\omega\cos\lambda\dot{y}\hat{z}$ είναι κάθετη σε αυτό.
Έτσι οι συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα πάνω στο επίπεδο xy δίνουν $\vec{a} = -2\vec{\omega}_\perp\times\vec{v}$, όπου $\vec{\omega}_\perp = \omega\sin\lambda\hat{z}$. (Η $\hat{z}$ συνιστώσα δίνει $\vec{N} = 2m\vec{\omega}_\parallel\times\vec{v}-m\vec{g}_{\rm eff}$.)
(β) Η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, δηλ. είναι κεντρομόλος και αλλάζει μόνο τη διεύθυνση της ταχύτητας και όχι το μέτρο της, το οποίο παραμένει ίσο με το αρχικό v_0. Άρα το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R που δίνεται από την $a = \dfrac{v_0^2}{R} \Leftrightarrow 2\omega v_0\sin\lambda = \dfrac{v_0^2}{R} \Leftrightarrow R = \dfrac{v_0}{2\omega\sin\lambda}$.
Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση κίνησης $\vec{a} = -2\vec{\omega}_\perp\times\vec{v}$ και να καταλήξουμε με αυτό τον τρόπο στο συμπέρασμα ότι η κίνηση είναι ομαλή κυκλική: Οι συνιστώσες της είναι $\dot{v}_x = \Omega v_y$, $\dot{v}_y = -\Omega v_x$, όπου $\Omega = 2\omega\sin\lambda$. Λύνοντας την πρώτη ως προς v_y και αντικαθιστώντας στην δεύτερη έχουμε $\ddot{v}_x+\Omega^2 v_x = 0$ με λύση $v_x = C_1\cos(\Omega t)+C_2\sin(\Omega t)$, όπου C_1 και C_2 σταθερές ολοκλήρωσης. Η αντικατάσταση στην πρώτη δίνει $v_y = -C_1\sin(\Omega t)+C_2\cos(\Omega t)$. Οι αρχικές συνθήκες $v_x|_{t=0} = v_0\cos\phi_0$, $v_y|_{t=0} = v_0\sin\phi_0$ δίνουν $C_1 = v_0\cos\phi_0$ και $C_2 = v_0\sin\phi_0$, οπότε η ταχύτητα του σώματος είναι $\vec{v} = v_0\cos(\Omega t-\phi_0)\hat{x}-v_0\sin(\Omega t-\phi_0)\hat{y}$. Ολοκληρώνοντας

τις $\dot{x} = v_x = v_0 \cos(\Omega t - \phi_0)$ και $\dot{y} = v_y = -v_0 \sin(\Omega t - \phi_0)$ και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $\vec{r}|_{t=0} = 0$ βρίσκουμε $x = R\left[\sin(\Omega t - \phi_0) + \sin\phi_0\right] = 2R\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega t}{2} - \phi_0\right)$, $y = R\left[\cos(\Omega t - \phi_0) - \cos\phi_0\right] = -2R\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega t}{2} - \phi_0\right)$, όπου $R = \frac{v_0}{\Omega}$. Η λύση ικανοποιεί εξίσωση κύκλου $(x - R\sin\phi_0)^2 + (y + R\cos\phi_0)^2 = R^2$.

Με $\lambda = 38°$ (Αθήνα) και $v_0 = 1$ m s^{-1} προκύπτει $R = \dfrac{v_0}{2\omega\sin\lambda} = 11$ km! (Οι μεγάλες ακτίνες, καθώς και η ύπαρξη τριβών, κάνει αδύνατη την παρατήρηση αυτών των κινήσεων. Επιπλέον, όπως θα δούμε στο (δ) ερώτημα, η μελέτη δεν είναι αυτοσυνεπής, καθώς δεν είναι σωστό να αμελήσουμε την καμπυλότητα της επιφάνειας του πάγου.)

(γ) Προσθέτοντας αντίσταση κύλισης έχουμε $\vec{a} = -2\vec{\omega}_\perp \times \vec{v} - k\vec{v}$ με συνιστώσες $\ddot{x} = \Omega\dot{y} - k\dot{x}$, $\ddot{y} = -\Omega\dot{x} - k\dot{y}$, όπου $\Omega = 2\omega\sin\lambda$. Με $\zeta = x + iy$ το σύστημα γίνεται $\ddot{\zeta} + (k + i\Omega)\dot{\zeta} = 0$, δηλ. μια γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η οποία έχει γενική λύση $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 e^{-(k+i\Omega)t}$, με $\zeta_{1,2}$ μιγαδικές σταθερές. Θέτοντας $\zeta_1 = C_1 + iD_1$ και $\zeta_2 = C_2 + iD_2$, προκύπτει $\zeta = C_1 + iD_1 + (C_2 + iD_2)e^{-kt}\left[\cos(\Omega t) - i\sin(\Omega t)\right]$, οπότε $x = C_1 + e^{-kt}\left[C_2\cos(\Omega t) + D_2\sin(\Omega t)\right]$, $y = D_1 + e^{-kt}\left[D_2\cos(\Omega t) - C_2\sin(\Omega t)\right]$. Η αρχική θέση είναι $x|_{t=0} = C_1 + C_2$, $y|_{t=0} = D_1 + D_2$ και η αρχική ταχύτητα $\dot{x}|_{t=0} = -kC_2 + \Omega D_2$, $\dot{y}|_{t=0} = -kD_2 - \Omega C_2$. Οι αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = y|_{t=0} = 0$, $v_x|_{t=0} = v_0\cos\phi_0$, $v_y|_{t=0} = v_0\sin\phi_0$ δίνουν $C_1 = \dfrac{v_0\left(k\cos\phi_0 + \Omega\sin\phi_0\right)}{\Omega^2 + k^2} = \dfrac{v_0\cos(\phi_0 - \phi_k)}{\sqrt{\Omega^2 + k^2}}$, $D_1 = \dfrac{v_0\left(k\sin\phi_0 - \Omega\cos\phi_0\right)}{\Omega^2 + k^2} = \dfrac{v_0\sin(\phi_0 - \phi_k)}{\sqrt{\Omega^2 + k^2}}$, $C_2 = -C_1$, $D_2 = -D_1$, όπου $\phi_k = \arctan\dfrac{\Omega}{k}$.

Άρα η θέση σε κάθε χρόνο είναι $x = \dfrac{v_0}{\sqrt{\Omega^2 + k^2}}\left[-e^{-kt}\cos(\Omega t - \phi_0 + \phi_k) + \cos(\phi_0 - \phi_k)\right]$, $y = \dfrac{v_0}{\sqrt{\Omega^2 + k^2}}\left[e^{-kt}\sin(\Omega t - \phi_0 + \phi_k) + \sin(\phi_0 - \phi_k)\right]$.

Σε θεωρητικά άπειρο χρόνο το σώμα καταλήγει σε απόσταση $\dfrac{v_0}{\sqrt{\Omega^2 + k^2}}$ από την αρχική θέση, πάνω στην ημιευθεία που σχηματίζει προσανατολισμένη γωνία $\phi_0 - \phi_k$ με την κατεύθυνση προς το νότο, μετρούμενη προς την ανατολή, δηλ. στο σημείο $\dfrac{v_0}{\sqrt{\Omega^2 + k^2}}\left[\cos(\phi_0 - \phi_k)\hat{x} + \sin(\phi_0 - \phi_k)\hat{y}\right]$.

Πρακτικά αυτό γίνεται σε χρόνο $\sim 5/k$.

(δ) Στα αποτελέσματα οι επιταχύνσεις είναι τάξη μεγέθους $a \sim \Omega v$ και οι ταχύτητες $v \sim \Omega r$, επομένως $a \sim \Omega^2 r$, δηλ., αφού $\Omega \sim \omega$, ίδιας τάξης μεγέθους με τους όρους που αγνοήσαμε! Η μελέτη λοιπόν δεν είναι αυτοσυνεπής και άρα δεν είναι ακριβής.

---

2. (α) Στον περιστρεφόμενο άξονα $\vec{r} = x\hat{x}$, $\vec{v} = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$.

Στο δαχτυλίδι ασκείται το βάρος, ολική φυγόκεντρος (συμπεριλαμβανομένης της $-m\vec{a}_0$), η Coriolis και η αντίδραση από το σύρμα. Μόνο το βάρος και η ολική φυγόκεντρος έχουν συνιστώσα πάνω στην κίνηση και το άθροισμα των αντίστοιχων δυναμικών ενεργειών είναι $V = -\dfrac{GMm}{r_M} - \dfrac{m\omega^2 r_{M\perp}^2}{2}$, όπου $\vec{r}_M = \varpi_0\hat{\varpi} + x\hat{x}$ το διάνυσμα θέσης του δαχτυλιδιού από τη μάζα M και $\vec{r}_{M\perp} = (\varpi_0 + x\cos\psi)\hat{\varpi}$ η προβολή του κάθετα στον άξονα περιστροφής.

Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την κίνηση στο περιστρεφόμενο σύστημα με αρχή το M. Σε αυτό δεν θα υπήρχε $m\vec{a}_0$, αλλά η φυγόκεντρος θα ήταν $m\omega^2\vec{r}_{M\perp}$ και η ολική φυγόκεντρος θα ήταν ίδια.

Αντικαθιστώντας $M = \omega^2\varpi_0^3/G$, $r_M = \sqrt{x^2 + 2\varpi_0 x\hat{\varpi}\cdot\hat{x} + \varpi_0^2} = \sqrt{x^2 + 2\varpi_0 x\cos\psi + \varpi_0^2}$ και $r_{M\perp} = \varpi_0 + x\cos\psi$, βρίσκουμε $V(x) = -\dfrac{m\omega^2\varpi_0^3}{\sqrt{x^2 + 2\varpi_0 x\cos\psi + \varpi_0^2}} - \dfrac{m\omega^2(\varpi_0 + x\cos\psi)^2}{2}$.

Το ολοκλήρωμα «ενέργειας» είναι $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$ και αποτελεί την εξίσωση κίνησης.
Η συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα στον περιστρεφόμενο άξονα x είναι $m\ddot{x} = -\dfrac{GMm\vec{r}_M}{r_M^3}\cdot\hat{x} - m\vec{a}_0\cdot\hat{x} - m\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right]\cdot\hat{x}$, όπου $-m\vec{a}_0 = m\omega^2\varpi_0\hat{\varpi}$ και $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\omega^2\vec{r}_\perp = m\omega^2 x\cos\phi\hat{\varpi}$. Η ολική φυγόκεντρος είναι $-m\vec{a}_0 - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\omega^2(\varpi_0 + x\cos\psi)\hat{\varpi}$. Έτσι ο νόμος Νεύτωνα δίνει $m\ddot{x} = -\dfrac{GMm\,(\varpi_0\hat{\varpi} + x\hat{x})\cdot\hat{x}}{(x^2 + 2\varpi_0 x\cos\psi + \varpi_0^2)^{3/2}} + m\omega^2(\varpi_0 + x\cos\psi)\hat{\varpi}\cdot\hat{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} = F(x)$, με $F(x) = -\dfrac{GMm\,(x + \varpi_0\cos\psi)}{(x^2 + 2\varpi_0 x\cos\psi + \varpi_0^2)^{3/2}} + m\omega^2(\varpi_0 + x\cos\psi)\cos\psi$.

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με το ολοκλήρωμα $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$ με δυναμική ενέργεια $V(x) = -\displaystyle\int F(x)\,dx = -\dfrac{GMm}{\sqrt{x^2 + 2\varpi_0 x\cos\psi + \varpi_0^2}} - \dfrac{m\omega^2(\varpi_0 + x\cos\psi)^2}{2}$.

(β) Η παράγωγος $V'(x) = \dfrac{m\omega^2\varpi_0^3\,(x + \varpi_0\cos\psi)}{(x^2 + 2\varpi_0 x\cos\psi + \varpi_0^2)^{3/2}} - m\omega^2(\varpi_0 + x\cos\psi)\cos\psi$ μηδενίζεται στο $x = 0$, άρα είναι σημείο ισορροπίας.
Η δεύτερη παράγωγος είναι $V''(x) = -\dfrac{m\omega^2\varpi_0^3\left[2x^2 + 4\varpi_0 x\cos\psi + (3\cos^2\psi - 1)\varpi_0^2\right]}{(x^2 + 2\varpi_0 x\cos\psi + \varpi_0^2)^{5/2}} - m\omega^2\cos^2\psi$ και η τιμή της στο $x = 0$ είναι $V''(0) = m\omega^2\,(1 - 4\cos^2\psi)$.
Αν $V''(0) > 0 \Leftrightarrow \cos\psi < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \psi > 60^\circ$ το ακρότατο είναι ελάχιστο και η ισορροπία ευσταθής, ενώ αντίθετα αν $\psi < 60^\circ$ το ακρότατο είναι μέγιστο και η ισορροπία ασταθής.

Η κίνηση γύρω από το $x = 0$ περιγράφεται από $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + V(0) + V'(0)x + \dfrac{1}{2}V''(0)x^2 =$ σταθερά, ή, $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\omega^2}{2}\left(1 - 4\cos^2\psi\right)x^2 =$ σταθερά, η παράγωγος της οποίας δίνει $\ddot{x} + \omega^2\left(1 - 4\cos^2\psi\right)x = 0$.
Αν η ισορροπία είναι ευσταθής είναι εξίσωση ταλαντωτή με κυκλική συχνότητα $\Omega = \omega\sqrt{1 - 4\cos^2\psi}$, άρα η περίοδος μικρών ταλαντώσεων είναι $T = \dfrac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - 4\cos^2\psi}}$.
Τα σχήματα δείχνουν τη δυναμική ενέργεια για τρεις γωνίες, μία $\psi < 60^\circ$, την $\psi = 60^\circ$ και μία $\psi > 60^\circ$, κοντά στο σημείο $x = 0$ (πάνω) και σε μεγαλύτερη κλίμακα (κάτω).
Αν η γωνία είναι ίση με $\psi = 60^\circ$ τότε πρέπει να κρατήσουμε και τον επόμενο όρο στο ανάπτυγμα της $V(x)$. Η τρίτη παράγωγος στο $x = 0$ (για $\psi = 60^\circ$) προκύπτει αρνητική, επομένως η δυναμική συμπεριφέρεται σαν $-x^3$ και η γραφική μελέτη δείχνει ότι το $x = 0$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.