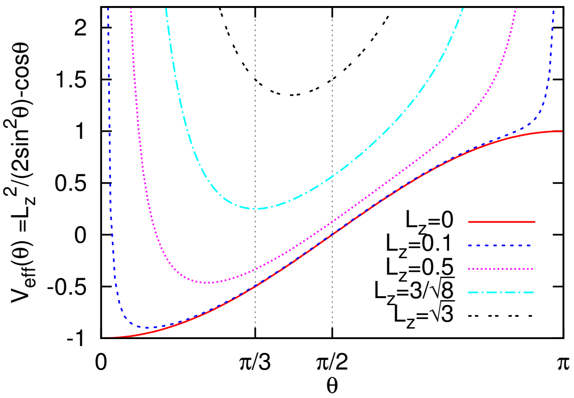
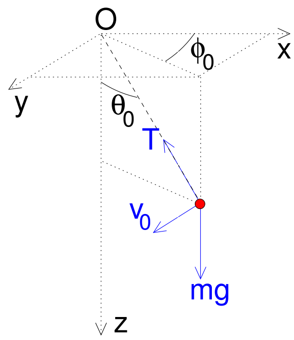
Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016 Ν. Βλαχάκης

---

1. Σημειακό σώμα μάζας m είναι δεμένο σε αβαρές και μη εκτατό νήμα ακτίνας R και κινείται κάτω από την επίδραση του βάρους του $mg\hat{z}$ και της τάσης από το νήμα $\vec{T} = -T\hat{r}$ (σφαιρικό εκκρεμές).
(α) Δείξτε ότι διατηρείται η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής $L_z = (\vec{r} \times m\vec{v}) \cdot \hat{z}$. Βρείτε την έκφρασή της σε σφαιρικές συντεταγμένες.
(β) Γράψτε σε σφαιρικές συντεταγμένες την κινητική, τη δυναμική και την ολική ενέργεια E.
(γ) Δείξτε ότι η διατήρηση της στροφορμής L_z και της ενέργειας E ανάγουν το πρόβλημα σε «μονοδιάστατο» στο οποίο ισχύει $\dfrac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + V_{\rm eff}(\theta) = E$ με $V_{\rm eff}(\theta) = \dfrac{L_z^2}{2mR^2\sin^2\theta} - mgR\cos\theta$.
Κάτω αριστερά φαίνεται το γράφημα της $V_{\rm eff}(\theta)$ για διάφορα L_z (με το $V_{\rm eff}$ σε μονάδες mgR και το L_z σε μονάδες $\sqrt{m^2gR^3}$).





(δ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $\theta_0 = \pi/3$ και έχει οριζόντια ταχύτητα $\vec{v} = v_0\hat{\phi}$.
(δ$_1$) Για δεδομένο v_0 ποια η στροφορμή L_z, ποια η συνάρτηση $V_{\rm eff}(\theta)$ και ποια η ενέργεια E;
(δ$_2$) Για ποιες τιμές της v_0 το σώμα περνά πάνω από το επίπεδο xy;
(δ$_3$) Διερευνήστε αν και πότε χαλαρώνει το νήμα. (Αν δεν θυμάστε την έκφραση του a_r στις σφαιρικές συντεταγμένες, μπορείτε να την βρείτε παραγωγίζοντας δύο φορές τη σχέση $\vec{r}^{\,2} = R^2$.)
(δ$_4$) Για ποια v_0 το σώμα εκτελεί οριζόντια κυκλική τροχιά $\theta =$ σταθερό $= \pi/3$ (κωνικό εκκρεμές);
(δ$_5$) Αν διαταράξουμε την κυκλική αυτή τροχιά δίνοντας μια στιγμιαία μικρή ώθηση στην $\hat{\theta}$ κατεύθυνση ποια η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων; Ποια η σχέση της με την περίοδο της αρχικής κυκλικής κίνησης;

---

2. Σώμα μάζας m κινείται σε άξονα x πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, υπό την επίδραση δύναμης ελατηρίου $-kx\hat{x}$ και τριβής ολίσθησης μmg.
(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι αν μετράμε μήκη σε μονάδες $\mu mg/k$ και χρόνους σε μονάδες $\sqrt{m/k}$ απλοποιείται σε $\ddot{x} = -x \mp 1$, όπου $\pm$ το πρόσημο της ταχύτητας.
(β) Δείξτε ότι σε κάθε επιμέρους κίνηση στην οποία το πρόσημο της ταχύτητας είναι σταθερό, υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + V_\pm(x) =$ σταθερά, με $V_\pm = \dfrac{1}{2}(x \pm 1)^2$.
(γ) Έστω αρχικά $x = -7.7$ και $\dot{x} = 0$. Περιγράψτε την κίνηση και φτιάξτε πρόχειρα το διάγραμμα $x = x(t)$ και την καμπύλη φάσης.

ΛΥΣΕΙΣ:

1. (α) $\dot{L}_z = \left(\dot{\vec{r}}\times m\vec{v}\right)\cdot\hat{z} + \left(\vec{r}\times m\dot{\vec{v}}\right)\cdot\hat{z} = 0 + (\vec{r}\times m\vec{a})\cdot\hat{z} = [\vec{r}\times(-T\hat{r}+mg\hat{z})]\cdot\hat{z} = 0.$
$L_z = m\varpi^2\dot{\phi} = mR^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}$ αφού $\varpi = R\sin\theta$.
Αλλιώς: $\vec{v} = R\ \dot{\theta}\ \hat{\theta} + R\sin\theta\ \dot{\phi}\ \hat{\phi}$, $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ R & 0 & 0 \\ 0 & mR\ \dot{\theta} & mR\sin\theta\ \dot{\phi} \end{vmatrix} = -mR^2\sin\theta\ \dot{\phi}\ \hat{\theta} +$ $mR^2\ \dot{\theta}\ \hat{\phi}$, $L_z = \vec{L}\cdot\hat{z} = mR^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}$, διότι $\hat{z} = (\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{z}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{z}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\theta\ \hat{r} - \sin\theta\ \hat{\theta}$.
(β) $\vec{v} = R\ \dot{\theta}\ \hat{\theta} + R\sin\theta\ \dot{\phi}\ \hat{\phi}$, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\phi}^2\right)$, $V = -mgz = -mgR\cos\theta$,
$E = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\ \dot{\phi}^2\right) - mgR\cos\theta$. Η ενέργεια είναι σταθερή αφού το βάρος είναι συντηρητική δύναμη ενώ η τάση του νήματος δεν παράγει έργο.
(γ) Η ζητούμενη προκύπτει αντικαθιστώντας $\dot{\phi} = \dfrac{L_z}{mR^2\sin^2\theta}$ στο ολοκλήρωμα ενέργειας.
(δ_1) Αρχικά $\vec{v} = v_0\hat{\phi}$, δηλ. $\dot{\theta} = 0$ και $\dot{\phi} = \dfrac{v_0}{R\sin\theta_0}$. Άρα $L_z = mR\sin\theta_0 v_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mRv_0$,
$V_{\text{eff}}(\theta) = \dfrac{3mv_0^2}{8\sin^2\theta} - mgR\cos\theta$, $E = \dfrac{mv_0^2}{2} - mgR\cos\theta_0 = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{mgR}{2}$.
(δ_2) Η εξίσωση $V_{\text{eff}}(\theta) = E$ έχει λύσεις τα όρια της τροχιάς $\theta_{\min}$ και $\theta_{\max}$, τα οποία εδώ είναι $\theta_{\min} = \pi/3$ και $\theta_{\max} > \pi/2$ αντίστοιχα. Δηλ. πρέπει $V_{\text{eff}}(\pi/2) < E \Leftrightarrow v_0 > 2\sqrt{gR}$
Στην οριακή περίπτωση είναι $v_0 = 2\sqrt{gR}$, οπότε $L_z = \sqrt{3}\sqrt{m^2gR^3}$ και $E = \frac{3}{2}mgR$. Όπως φαίνεται από το γράφημα της $V_{\text{eff}}(\theta)$ τα όρια της τροχιάς είναι $V_{\text{eff}}(\theta) \le E \Leftrightarrow \pi/3 \le \theta \le \pi/2$.
(δ_3) $\dfrac{d}{dt}\vec{r}^{\,2} = 0 \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{v} = 0$ και $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow v^2 + \vec{r}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow v^2 + Ra_r = 0 \Leftrightarrow a_r = -\dfrac{v^2}{R}$.
Αυτή η σχέση δεν είναι ίδια με την $a_\kappa = \dfrac{v^2}{\mathcal{R}}$, διότι το κέντρο καμπυλότητας δεν είναι πάντα στο σημείο O, ούτε η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς είναι R. (Π.χ. στο κωνικό εκκρεμές όπου το θ μένει σταθερό, το σώμα εκτελεί οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας $\mathcal{R} = R\sin\theta$.)
Η προβολή του νόμου Νεύτωνα πάνω στη διεύθυνση $\hat{r}$ δίνει την τάση του νήματος: $ma_r = mg\hat{z}\cdot\hat{r} - T$ και αντικαθιστώντας $\hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta$ και $a_r = -\dfrac{v^2}{R}$ βρίσκουμε $T = mg\cos\theta + \dfrac{mv^2}{R}$.
Από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{mv^2}{2} - mgR\cos\theta = E \Leftrightarrow v^2 = \dfrac{2E}{m} + 2gR\cos\theta$, οπότε η τάση σε κάθε θέση είναι $T = 3mg\cos\theta + \dfrac{2E}{R}$.
Το νήμα χαλαρώνει σε θέση όπου $T = 0 \Leftrightarrow \cos\theta_\chi = -\dfrac{2E}{3mgR}$. Για να είναι αυτό δυνατό πρέπει να ισχύει αφενός $\cos\theta_\chi \ge -1 \Leftrightarrow E \le \frac{3}{2}mgR$ (η σχέση $\cos\theta_\chi \le 1 \Leftrightarrow E \ge -\frac{3}{2}mgR$ ισχύει πάντα αφού η ενέργεια είναι μεγαλύτερη ή ίση της ελάχιστης τιμής του V_{eff}, δηλ. του $-mgR$) και αφετέρου $V_{\text{eff}}(\theta_\chi) \le E \Leftrightarrow E \ge \dfrac{3L_z^2}{2mR^2\sin^2\theta_\chi}$. Αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η τελευταία είναι η $E > 0$, η οποία σημαίνει ότι $\cos\theta_\chi < 0 \Leftrightarrow \theta_\chi > \pi/2$, δηλ. μόνο όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από το επίπεδο xy υπάρχει περίπτωση να χαλαρώσει το νήμα, όπως αναμέναμε.
Για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες η συνθήκη $E \le \frac{3}{2}mgR$ μεταφράζεται σε $v_0 \le 2\sqrt{gR}$, κάτι που σύμφωνα με το ερώτημα (δ_2) σημαίνει ότι το σώμα θα έμενε κάτω από το επίπεδο xy. Επομένως το νήμα ποτέ δεν χαλαρώνει.
Αλλιώς: Η συνθήκη $E \ge \dfrac{3L_z^2}{2mR^2\sin^2\theta_\chi}$ για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες δίνει $f\left(\dfrac{v_0^2}{gR}\right) \le 0$,

όπου $f(\xi)=\xi^3-3\xi^2+\dfrac{57}{4}\xi+8$. Η συνάρτηση $f(\xi)$ είναι αύξουσα και άρα δεν μπορεί να είναι αρνητική για $\xi=v_0^2/gR>0$.

(δ$_4$) Πρέπει η $V_{\rm eff}(\theta)$ να έχει ελάχιστο στο $\theta=\pi/3$, δηλ. $V'_{\rm eff}(\pi/3)=0\Leftrightarrow v_0=\sqrt{3gR/2}$.
Ισοδύναμα μέσω των δυνάμεων, στη διεύθυνση $\hat z$ πρέπει $T\cos\theta_0=mg$ ενώ στην οριζόντια $T\sin\theta_0=\dfrac{mv_0^2}{R\sin\theta_0}$. Απαλείφοντας το T προκύπτει $v_0=\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}gR}=\sqrt{\dfrac{3gR}{2}}$ για $\theta_0=\pi/3$.

Όπως φαίνεται από το γράφημα της $V_{\rm eff}(\theta)$, αν $v_0<\sqrt{\dfrac{3}{2}gR}\Leftrightarrow L_z<\dfrac{3}{\sqrt8}\sqrt{m^2gR^3}$ το σώμα κινείται στο χώρο $\theta_{\rm min}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}$, δηλ. $\pi/3$ είναι η μεγαλύτερη από τις δύο ρίζες της $V_{\rm eff}(\theta)=E$.
Όμοια, αν $v_0>\sqrt{\dfrac{3}{2}gR}\Leftrightarrow L_z>\dfrac{3}{\sqrt8}\sqrt{m^2gR^3}$ το σώμα κινείται στο χώρο $\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\theta_{\rm max}$, δηλ. $\pi/3$ είναι η μικρότερη από τις δύο ρίζες της $V_{\rm eff}(\theta)=E$.
Τα ίδια προκύπτουν και από τη λύση της ανισότητας $V_{\rm eff}(\theta)-E\le0$. Η διαφορά $V_{\rm eff}(\theta)-E$ γράφεται $\dfrac{mgR}{\sin^2\theta}\left(\cos^3\theta+\dfrac{c-1}{2}\cos^2\theta-\cos\theta+\dfrac{4-c}{8}\right)$, όπου $c=\dfrac{v_0^2}{gR}>0$. Η παρένθεση μπορεί να παραγοντοποιηθεί (αφού ξέρουμε ότι μηδενίζεται για $\theta=\pi/3$, δηλ. για $\cos\theta=1/2$) και προκύπτει $V_{\rm eff}(\theta)-E=\dfrac{mgR}{\sin^2\theta}(\cos\theta+\mu_2)(\cos\theta-\mu_1)(\cos\theta-1/2)$ με $\mu_2=\dfrac{\sqrt{c^2-4c+16}+c}{4}$ και $\mu_1=\dfrac{\sqrt{c^2-4c+16}-c}{4}$. Για κάθε $c>0$ είναι $\mu_2>1$ και $-1<\mu_1<1$, επομένως η ανισότητα $V_{\rm eff}(\theta)-E\le0$ ισχύει για $\cos\theta$ μεταξύ των τιμών $1/2$ και μ_1. Ελέγχοντας αν το μ_1 είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του $1/2$ προκύπτει ότι για $c<3/2$ είναι $\mu_1>1/2$ και η επιτρεπτή περιοχή είναι $1/2\le\cos\theta\le\mu_1\Leftrightarrow\arccos\mu_1\le\theta\le\pi/3$ (διότι η $\cos\mu_1$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $0\le\mu_1\le\pi$), ενώ για $c>3/2$ είναι $\mu_1<1/2$ και η επιτρεπτή περιοχή είναι $\mu_1\le\cos\theta\le1/2\Leftrightarrow\pi/3\le\theta\le\arccos\mu_1$. Για $c=3/2$ η επιτρεπτή περιοχή ανάγεται στο σημείο $\theta=\pi/3$, περίπτωση που αντιστοιχεί στο κωνικό εκκρεμές.
Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε πότε το σώμα θα περάσει πάνω από το επίπεδο xy. Αυτό θα γίνει αν $\arccos\mu_1>\pi/2\Leftrightarrow\mu_1<0$ το οποίο υλοποιείται αν $c>4$.

(δ$_5$) Μετά την ώθηση η ταχύτητα είναι $v_0\hat\phi+\epsilon\hat\theta$ με $v_0=\sqrt{3gR/2}$. Επομένως δεν αλλάζει η $L_z=\dfrac{3}{\sqrt8}\sqrt{m^2gR^3}$, ούτε η $V_{\rm eff}(\theta)=\dfrac{9mgR}{16\sin^2\theta}-mgR\cos\theta$, $V'_{\rm eff}(\theta)=-\dfrac{9mgR\cos\theta}{8\sin^3\theta}+mgR\sin\theta$, $V''_{\rm eff}(\theta)=\dfrac{9mgR(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)}{8\sin^4\theta}+mgR\cos\theta$, ενώ η ενέργεια γίνεται $\dfrac{m(v_0^2+\epsilon^2)}{2}-mg\cos\theta_0=\dfrac{mgR}{4}+\dfrac{m\epsilon^2}{2}$.
Με $\theta=\dfrac{\pi}{3}+q$ (όπου $|q|\ll1$), είναι $V_{\rm eff}\left(\dfrac{\pi}{3}+q\right)\approx V_{\rm eff}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+V'_{\rm eff}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)q+\dfrac12V''_{\rm eff}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)q^2=\dfrac{mgR}{4}+\dfrac{7mgR}{4}q^2$ και το ολοκλήρωμα ενέργειας (με $\dot\theta=\dot q$) δίνει $\dot q^2+\dfrac{7g}{2R}q^2=\dfrac{\epsilon^2}{R^2}$, ή $\ddot q+\dfrac{7g}{2R}q=0$.
Άρα $\Omega=\sqrt{\dfrac{7g}{2R}}$ και η περίοδος είναι $T_r=2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{7g}}$. Η περίοδος της αρχικής κυκλικής κίνησης είναι $T_0=2\pi/\dot\phi=2\pi R\sin\theta_0/v_0=2\pi\sqrt{R/2g}$, άρα $T_r=\dfrac{2}{\sqrt7}T_0\approx0.756T_0$.
Από την $\dot q^2+\dfrac{7g}{2R}q^2=\dfrac{\epsilon^2}{R^2}$ το πλάτος της ταλάντωσης προκύπτει $q_0=|\epsilon|\sqrt{\dfrac{2}{7gR}}$.

2. (α) Όταν το σώμα έχει ταχύτητα $\dot{x} = \pm|\dot{x}|$ η εξίσωση κίνησής του είναι $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \mp \mu mg$ (η τριβή ολίσθησης είναι αντίθετη της ταχύτητας).
Αν μετράμε τη συντεταγμένη x σε μονάδες $\mu mg/k$ και τους χρόνους σε $\sqrt{m/k}$ μπορούμε να θέσουμε $x = \dfrac{\mu mg}{k}x'$, $t = \sqrt{\dfrac{m}{k}}t'$ στην εξίσωση κίνησης, οπότε αυτή γίνεται $m\dfrac{d^2\dfrac{\mu mg}{k}x'}{d\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}\,t'\right)^2} = -k\dfrac{\mu mg}{k}x' \mp \mu mg \Leftrightarrow \dfrac{d^2x'}{dt'^2} = -x' \mp 1$. Μπορούμε να αφαιρέσουμε του τόνους για απλούστευση, οπότε καταλήγουμε στην $\ddot{x} = -x \mp 1$.
Η εξίσωση αυτή περιγράφει γραμμική αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας ∓ 1.
Είναι δηλ. σαν να θέτουμε στην αρχική εξίσωση $\mu mg/k = 1$ και $\sqrt{m/k} = 1$.
(β) Είναι $\ddot{x} = F_\pm(x) \Leftrightarrow \dfrac{\dot{x}^2}{2} + V_\pm(x) =$ σταθερά, με $V_\pm = -\displaystyle\int F_\pm dx = \dfrac{1}{2}(x \pm 1)^2$ (μηδενίσαμε την αυθαίρετη προσθετική σταθερά ολοκλήρωσης).
Το ολοκλήρωμα προκύπτει και αν πολλαπλασιάσουμε το νόμο Νεύτωνα με την ταχύτητα $\dot{x}$.
(γ) Γενικά, όταν το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο σε σημείο x, θα αρχίσει να κινείται μόνο αν η δύναμη από το ελατήριο είναι μεγαλύτερη από την τριβή, δηλ. αν $|x| > 1$.
Αν η συνθήκη αυτή ικανοποιείται στο αρχικό σημείο $x_{min}^{(1)} < 0$ το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα x. Αφού η ταχύτητα είναι θετική ισχύει $\ddot{x} = -x - 1$, δηλ. η κίνηση είναι μέρος αρμονικής ταλάντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας $x = -1$. Το πλάτος ταλάντωσης είναι $-1 - x_{min}^{(1)}$, επομένως το σώμα θα φτάσει στο σημείο $x_{max}^{(1)} = -1 + (-1 - x_{min}^{(1)}) = -2 - x_{min}^{(1)}$ όπου στιγμιαία θα ακινητοποιηθεί ξανά.
Αν στο σημείο αυτό ισχύει η συνθήκη $|x| > 1$ το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μικρότερα x. Η κίνηση περιγράφεται από $\ddot{x} = -x + 1$, δηλ. είναι μέρος αρμονικής ταλάντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας $x = +1$. Το πλάτος ταλάντωσης είναι $x_{max}^{(1)} - 1$, επομένως το σώμα θα φτάσει στο σημείο $x_{min}^{(2)} = 1 - (x_{max}^{(1)} - 1) = 2 - x_{max}^{(1)}$ όπου στιγμιαία θα ακινητοποιηθεί ξανά.
Έτσι η κίνηση επαναλαμβάνεται μεταξύ των σημείων $x_{min}^{(n)} \to x_{max}^{(n)} = -2 - x_{min}^{(n)} \to x_{min}^{(n+1)} = 2 - x_{max}^{(n)}$ για οποιοδήποτε n, μέχρις ότου κάποιο ακραίο σημείο βρεθεί στην περιοχή $[-1, 1]$, οπότε το σώμα μένει εκεί γιατί η δύναμη ελατηρίου δεν μπορεί να υπερνικήσει την τριβή.
Κάθε κίνηση από ακινησία σε ακινησία διαρκεί μισή περίοδο, δηλ. χρόνο π.
Η κίνηση από το $x_{min}^{(n)}$ στο $x_{max}^{(n)}$ ξεκινά το χρόνο $(n-1) \times 2\pi$ με αρχικές συνθήκες $x = x_{min}^{(n)}$, $\dot{x} = 0$ και τελειώνει το χρόνο $(n-1) \times 2\pi + \pi$. Η κατάλληλη λύση της $\ddot{x} = -x - 1$ που την περιγράφει είναι η $x = -1 + (x_{min}^{(n)} + 1)\cos t$.
Η επόμενη κίνηση από το $x_{max}^{(n)}$ στο $x_{min}^{(n+1)}$ ξεκινά το χρόνο $(n-1) \times 2\pi + \pi$ με αρχικές συνθήκες $x = x_{max}^{(n)}$, $\dot{x} = 0$ και τελειώνει το χρόνο $n \times 2\pi$. Η κατάλληλη λύση της $\ddot{x} = -x + 1$ που την περιγράφει είναι η $x = 1 - (x_{max}^{(n)} - 1)\cos t$.
Στο διάγραμμα των δυναμικών ενεργειών, η τροχιά από το $x_{min}^{(n)}$ στο $x_{max}^{(n)}$ περιγράφεται από το ολοκλήρωμα $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + V_+(x) = E_+^{(n)}$ με $E_+^{(n)} = V_+(x_{min}^{(n)})$· τα άκρα της αντιστοιχούν στις τομές της παραβολικής καμπύλης $V_+(x)$ με την ενέργεια $E_+^{(n)}$. Η επόμενη τροχιά από το $x_{max}^{(n)}$ στο $x_{min}^{(n+1)}$ περιγράφεται από το ολοκλήρωμα $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + V_-(x) = E_-^{(n)}$ με $E_-^{(n)} = V_-(x_{max}^{(n)})$· τα άκρα της αντιστοιχούν στις τομές της παραβολικής καμπύλης $V_-(x)$ με την ενέργεια $E_-^{(n)}$.
Αν αρχικά το σώμα είναι ακίνητο στο $x = -7.7$ τότε θα κινηθεί με $x_{min}^{(1)} = -7.7 \to x_{max}^{(1)} =$

$-2-x_{min}^{(1)} = 5.7 \to x_{min}^{(2)} = 2-x_{max}^{(1)} = -3.7 \to x_{max}^{(2)} = -2-x_{min}^{(2)} = 1.7 \to x_{min}^{(3)} = 2-x_{max}^{(2)} = 0.3$. Συνολικά κινείται χρόνο 4π. Η κίνηση φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (οι γκρι περιοχές είναι οι $|x| < 1$ όπου το σώμα αν σταματήσει στιγμιαία μένει για πάντα ακίνητο καθώς η δύναμη ελατηρίου δεν μπορεί να υπερνικήσει την στατική τριβή).