Μηχανική Ι – Εργασία #4

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016 Ν. Βλαχάκης

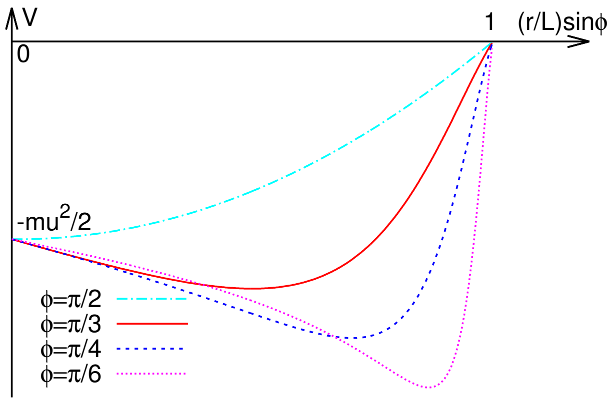
1. Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα σε πεδίο δύναμης $V = \dfrac{3x^2 - 1}{(x^2+1)^{5/2}}$.

(α) Σχεδιάστε το γράφημα της δυναμικής ενέργειας.
(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας, ευσταθή και ασταθή.
(γ) Ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας;
(δ) Αν το σώμα αρχικά βρίσκεται στο $x = 0$ και κινείται με αρχική ταχύτητα $v_0 > 0$ περιγράψτε την κίνησή του.
(ε) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

---

2. Στο πρόβλημα 1 της πρώτης εργασίας, στο ερώτημα (ε), βρήκαμε ότι η κίνηση της ράβδου περιγράφεται από την εξίσωση $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V(r) = 0$ με $V(r) = -\dfrac{mu^2}{2}\dfrac{1+\cos^2\phi}{1+\left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2}$.

(α) Το γράφημα της $V(r)$ για $0 \le r \le L/\sin\phi$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθειά του περιγράψτε την κίνηση της ράβδου.
(β) Αν η ράβδος φτάνει στη θέση $r = L/\sin\phi$ σε χρόνο t_0, βρείτε το ολοκλήρωμα που δίνει το t_0. (Για $t = 0$ είναι $r = 0$.)

---

3. Ιδανικό επίπεδο εκκρεμές (σώμα μάζας m δεμένο σε αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους R) κινείται στο ημιεπίπεδο $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ υπό την επίδραση ιδιότυπου «βάρους» $m\vec{g} = m\lambda^2 R^2 \dfrac{1}{y}\arctan\dfrac{y}{x}\,\hat{x}$. Το πακτωμένο άκρο του νήματος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.
Μελετήστε την κίνηση της μάζας σε πολικές συντεταγμένες.
Συγκεκριμένα, γράψτε την διαφορική εξίσωση που δίνει την $\phi(t)$ και κατόπιν επιλύστε την για τυχαίες αρχικές συνθήκες $\phi|_{t=0} = \phi_0$, $\dot{\phi}|_{t=0} = \omega_0$.
Ποια η τάση του νήματος σε κάθε θέση ϕ;

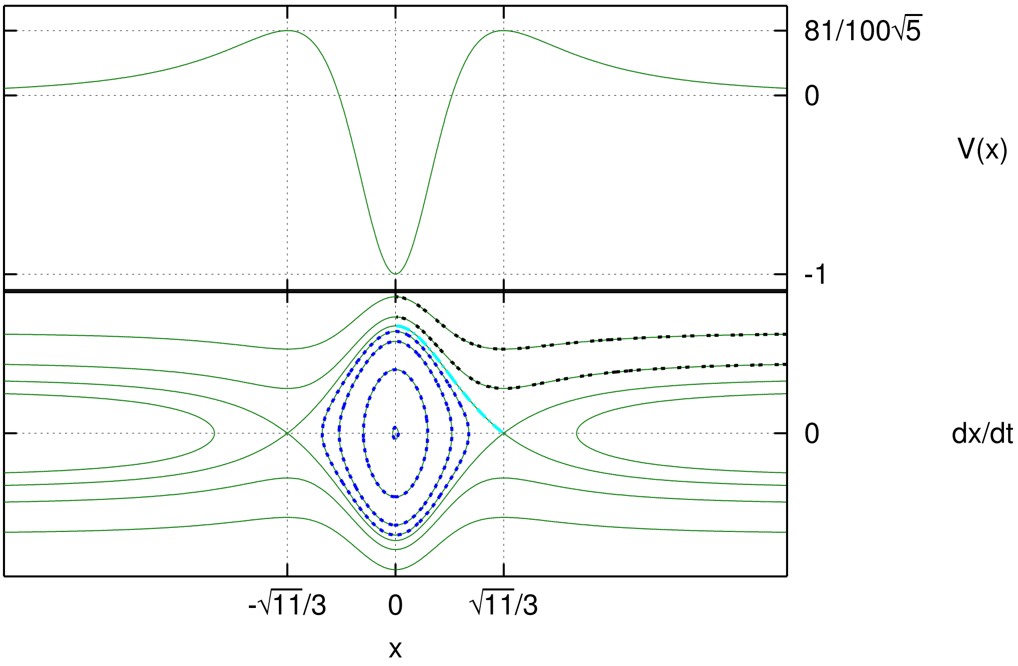
---

1. (α) Η $V=\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}$ είναι άρτια και αρκεί να την μελετήσουμε στο διάστημα $x\in[0,\infty]$.

$$V=\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}\,,\qquad V'=\frac{11x-9x^3}{(x^2+1)^{7/2}}=\frac{-9x\left(x+\dfrac{\sqrt{11}}{3}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{11}}{3}\right)}{(1+x^2)^{7/2}}\,,$$

$$V''=\frac{36x^4-93x^2+11}{(x^2+1)^{9/2}}=\frac{36\left(x^2-\dfrac{31-\sqrt{785}}{24}\right)\left(x^2-\dfrac{31+\sqrt{785}}{24}\right)}{(1+x^2)^{9/2}}\,.$$

x	0		$\sqrt{\dfrac{31-\sqrt{785}}{24}}$		$\dfrac{\sqrt{11}}{3}$		$\sqrt{\dfrac{31+\sqrt{785}}{24}}$		$+\infty$
V'	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
V''	11	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
V	-1	↗		↗	$\dfrac{81}{100\sqrt{5}}$	↘		↘	0



(β) Σημεία ισορροπίας (ακρότατα της V) είναι τα $x=-\sqrt{11}/3\,,0\,,\sqrt{11}/3$. Το $x=0$ είναι ευσταθές (αφού το V ελάχιστο) και τα $x=\pm\sqrt{11}/3$ είναι ασταθή (αφού το V μέγιστο).

(γ) Γύρω από το ευσταθές είναι $V\approx V(0)+V'(0)x+\dfrac{1}{2}V''(0)x^2=-1+\dfrac{11}{2}x^2$, άρα το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{\dot{x}^2}{2}+\dfrac{11}{2}x^2=E+1$. Παραγωγίζοντάς το βρίσκουμε $\ddot{x}+11x=0$, δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με $\omega=\sqrt{11}$ και περίοδο $\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{11}}$.

(δ) $E=\dfrac{mv_0^2}{2}+V(0)=\dfrac{v_0^2}{2}-1$.

Αν $E<\dfrac{81}{100\sqrt{5}}\Leftrightarrow v_0<\sqrt{2+\dfrac{81}{50\sqrt{5}}}$ εκτελεί ταλάντωση γύρω από το $x=0$, μεταξύ των σημείων

$x_{\min}$ και $x_{\max}$, τις ρίζες της $V(x) = E$ (αν $E > 0$ επιλέγουμε τις πλησιέστερες ρίζες στο $x = 0$).
Αν $E = \dfrac{81}{100\sqrt{5}} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2 + \dfrac{81}{50\sqrt{5}}}$ κινείται για πάντα προς το ασταθές σημείο ισορροπίας $x = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
Αν $E > \dfrac{81}{100\sqrt{5}} \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{2 + \dfrac{81}{50\sqrt{5}}}$ κινείται διαρκώς προς μεγαλύτερα x μέχρι το $+\infty$ (καταλήγει να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα v_∞, όπου $E = \dfrac{mv_\infty^2}{2} + V(\infty) \Leftrightarrow v_\infty = \sqrt{2E}$).
(ε) Το διάγραμμα φάσης έχει σχεδιαστεί κάτω από το γράφημα της V. Σ' αυτό φαίνονται και οι διάφορες τροχιές που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις του ερωτήματος (δ): με μπλε οι ταλαντώσεις $E < V_{\max}$, με γαλάζιο η κίνηση με $E = V_{\max}$ και με μαύρο οι $E > V_{\max}$.

---

2. (α) Το πρόβλημα είναι όμοιο με μονοδιάστατη κίνηση σώματος με δυναμική ενέργεια $V(r)$ και μηδενική ενέργεια $E_r = 0$.
Η ενέργεια αυτή δεν είναι η πραγματική ενέργεια του συστήματος των δύο μαζών στα άκρα της ράβδου, την οποία είχαμε βρει $E = \dfrac{mu^2}{2}\left(1 + \cos^2\phi\right)$. Η σχέση $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V(r) = E_r$ είναι ουσιαστικά το ολοκλήρωμα ενέργειας για τη μάζα που βρίσκεται στο άκρο A της ράβδου και η δυναμική ενέργεια σχετίζεται με την ενέργεια του σώματος στο άκρο B. Είναι $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{m\dot{x}^2}{2} = E \Leftrightarrow \dfrac{m\dot{x}^2}{2} = E + V(r)$.
Αφού $E_r = 0$ η κίνηση επιτρέπεται στο διάστημα $V(r) \leq E_r \Leftrightarrow 0 \leq r \leq \dfrac{L}{\sin\phi}$. (Οι ράγες δεν επιτρέπουν την κίνηση στην περιοχή $r < 0$. Αυτό το «εμπόδιο» μπορεί να ειδωθεί και σαν απειρισμός του V στην περιοχή που η κίνηση δεν επιτρέπεται.)
Για κάθε οξεία γωνία ϕ η κίνηση ξεκινά από το $r = 0$ και καθώς προχωρά προς μεγαλύτερα r η ταχύτητα $\dot{r} = |\dot{r}|$ αυξάνεται μέχρι το σημείο που η $V(r)$ γίνεται ελάχιστη, αφού σε κάθε σημείο $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} = E_r - V(r) \Leftrightarrow |\dot{r}| = \sqrt{\dfrac{-2V(r)}{m}}$.
Στο ελάχιστο $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = L\cot\phi$ και $V_{\min} = -\dfrac{mu^2}{2}\left(1 + \cos^2\phi\right) = -E$. Στη θέση αυτή είναι $\dot{x} = 0$ και η κινητική ενέργεια του σώματος στο A (άρα και η $|\dot{r}|$) είναι αναμενόμενα μέγιστη.
Στη συνέχεια η $V(r)$ αυξάνεται, οπότε η $\dot{r} = |\dot{r}|$ μειώνεται. Στη θέση $r = \dfrac{L}{\sin\phi}$ είναι $\dot{r} = 0$ και $\dfrac{dV}{dr} > 0$, οπότε το $r(t)$ αφού φτάσει τη μέγιστη τιμή $r = \dfrac{L}{\sin\phi}$ θα αρχίσει να μειώνεται, κάτι που σημαίνει ότι η ράβδος «ανακλάται» και θα επιστρέψει στην αρχική της θέση με αντίθετη ταχύτητα από την αρχική. (Σε κάθε σημείο της κίνησης με $\dot{r} < 0$ είναι $\dot{r} = -\sqrt{\dfrac{-2V(r)}{m}}$.)
Τη στιγμή που η ράβδος είναι κατακόρυφη η μάζα στο A έχει μηδενική ταχύτητα, αλλά η μάζα στο B έχει ταχύτητα προς το O (η οποία μπορεί να βρεθεί από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{m\dot{x}^2}{2} = E$, δηλ. είναι $\dot{x} = -u\sqrt{1 + \cos^2\phi}$). Επομένως θα «τραβήξει» πίσω τη μάζα στο A κάτι που εξηγεί με ένα άλλο τρόπο ότι η ράβδος «ανακλάται» και μετά το σημείο $r = L/\sin\phi$ θα κινηθεί προς την αρχική της θέση.
Όταν η ράβδος φτάσει στην αρχική της θέση (κινούμενη με αντίθετη ως προς την αρχική ταχύτητα), η μάζα στο A θα ανακλαστεί από την τομή των ραγών στην αρχή των αξόνων. Αν η ανάκλαση είναι ελαστική η ράβδος θα εκτελέσει ίδια κίνηση ξεκινώντας πάλι με $\dot{r} = u$, δηλ. θα εκτελεί αμείωτη ταλάντωση μεταξύ της οριζόντιας ($r = 0$) και κατακόρυφης ($r = L/\sin\phi$) θέσης.

Αν στην κρούση της μάζας στο Α με την αρχή των αξόνων χάνεται ενέργεια τότε μετά από κάθε κρούση θα ξεκινά με μικρότερη αρχική ταχύτητα u_i. Αυτό σημαίνει ότι η ράβδος θα ταλαντώνεται πάλι μεταξύ οριζόντιας ($r = 0$) και κατακόρυφης ($r = L/\sin\phi$) θέσης, αλλά κάθε νέα ταλάντωση θα είναι πιο αργή από την προηγούμενη.

(β) Το ολοκλήρωμα ενέργειας (είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών για την $r(t)$) δίνει

$$t = \int_0^t dt = \int_0^r \frac{dr}{\dot r} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{-2V(r)}{m}}} = \frac{1}{u\sqrt{1+\cos^2\phi}} \int_0^r \sqrt{1 + \left(\cos\phi - \frac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2}\, dr.$$

Η ράβδος θα φτάσει στην κατακόρυφη θέση ($r = L/\sin\phi$) σε χρόνο t_0 που δίνεται από το ολοκλήρωμα $t_0 = \dfrac{1}{u\sqrt{1+\cos^2\phi}} \displaystyle\int_0^{L/\sin\phi} \sqrt{1 + \left(\cos\phi - \frac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2}\, dr.$

Με $r = \dfrac{L\sin\xi}{\sin\phi}$ ο χρόνος αυτός γράφεται $t_0 = \dfrac{L}{u\sin\phi\sqrt{1+\cos^2\phi}} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\xi + \cos^2(\xi+\phi)}\, d\xi.$

---

3. Νόμος Νεύτωνα: $m\vec a = \vec T + m\vec g$ με $\vec a = -R\dot\phi^2\hat\varpi + R\ddot\phi\hat\phi$, $\vec T = -T\hat\varpi$, $m\vec g = m\lambda^2 R^2 \dfrac{1}{y}\arctan\dfrac{y}{x}\,\hat x$. Για να γράψουμε το «βάρος» σε πολικές συντεταγμένες γράφουμε $y = R\sin\phi$, $x = R\cos\phi$, $\arctan\dfrac{y}{x} = \phi$ (αφού η κίνηση γίνεται στο ημιεπίπεδο $x > 0$ είναι $-\pi/2 < \phi < \pi/2$) και $\hat x = (\hat x\cdot\hat\varpi)\hat\varpi + (\hat x\cdot\hat\phi)\hat\phi = \cos\phi\ \hat\varpi - \sin\phi\ \hat\phi$. Άρα $m\vec g = m\lambda^2 R\dfrac{\phi}{\sin\phi}\left(\cos\phi\ \hat\varpi - \sin\phi\ \hat\phi\right)$.

Επομένως νόμος Νεύτωνα: $m\left(-R\dot\phi^2\hat\varpi + R\ddot\phi\hat\phi\right) = -T\hat\varpi + m\lambda^2 R\dfrac{\phi}{\sin\phi}\left(\cos\phi\ \hat\varpi - \sin\phi\ \hat\phi\right)$.

Η $\hat\phi$ συνιστώσα του δίνει την εξίσωση κίνησης $\ddot\phi + \lambda^2\phi = 0$ (εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή).

Η λύση της είναι $\phi = C_1\cos(\lambda t) + C_2\sin(\lambda t)$, με $\dot\phi = -C_1\lambda\sin(\lambda t) + C_2\lambda\cos(\lambda t)$. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $\phi_0 = C_1$ και $\omega_0 = C_2\lambda$. Επομένως η λύση είναι $\phi = \phi_0\cos(\lambda t) + \dfrac{\omega_0}{\lambda}\sin(\lambda t)$.

Η τάση του νήματος θα βρεθεί από την $\hat\varpi$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα: $T = mR\dot\phi^2 + m\lambda^2 R\dfrac{\phi}{\tan\phi}$. Αφού θέλουμε την τάση συναρτήσει της θέσης και μόνο πρέπει να βρούμε το $\dot\phi$ συναρτήσει του ϕ. Αυτό προκύπτει από το ολοκλήρωμα ενέργειας. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση κίνησης με $\dot\phi$ προκύπτει $\dot\phi\ddot\phi + \lambda^2\phi\dot\phi = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\dot\phi^2}{2} + \dfrac{\lambda^2\phi^2}{2} =$ σταθερά. Η τιμή της σταθεράς προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες και έχουμε $\dfrac{\dot\phi^2}{2} + \dfrac{\lambda^2\phi^2}{2} = \dfrac{\omega_0^2}{2} + \dfrac{\lambda^2\phi_0^2}{2} \Leftrightarrow \dot\phi^2 = \omega_0^2 + \lambda^2\phi_0^2 - \lambda^2\phi^2$.

Η σχέση αυτή προκύπτει και απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ των $\phi = \phi_0\cos(\lambda t) + \dfrac{\omega_0}{\lambda}\sin(\lambda t)$ και $\dot\phi = -\phi_0\lambda\sin(\lambda t) + \omega_0\cos(\lambda t)$: λύνουμε τις εξισώσεις αυτές ως προς $\sin(\lambda t) = \dfrac{\lambda\omega_0\phi - \lambda\phi_0\dot\phi}{\omega_0^2 + \lambda^2\phi_0^2}$ και $\cos(\lambda t) = \dfrac{\phi_0\lambda^2\phi + \omega_0\dot\phi}{\omega_0^2 + \lambda^2\phi_0^2}$ και μετά χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2(\lambda t) + \cos^2(\lambda t) = 1$.

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της T βρίσκουμε $\vec T = -mR\left(\omega_0^2 + \lambda^2\phi_0^2 - \lambda^2\phi^2 + \lambda^2\dfrac{\phi}{\tan\phi}\right)\hat\varpi$.
