Μηχανική Ι – Εργασία #3

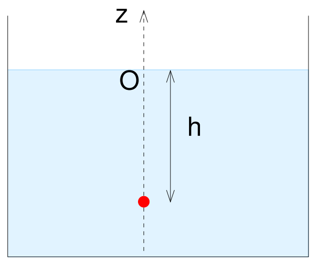
Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016 Ν. Βλαχάκης

---

1. Εξετάστε την αλήθεια των παρακάτω προτάσεων.
(α) Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι μηδενική όταν ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι μηδενικός.
(β) Αν κάποια στιγμή η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι μηδενική τότε η κίνηση είναι τοπικά ευθύγραμμη.
(γ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι σταθερή σε μια ομαλή κυκλική κίνηση.
(δ) Αν σε μια κίνηση τα μέτρα της κεντρομόλου και επιτρόχιας επιτάχυνσης είναι ίσα και το μέτρο της ταχύτητας v μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, τότε η ακτίνα καμπυλότητας είναι ανάλογη του v (μειώνεται επίσης εκθετικά με το χρόνο).

---

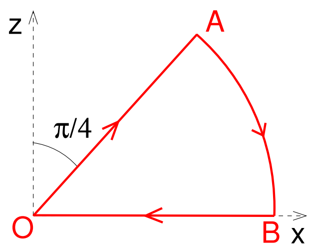
2. Έστω σώμα ελαφρύτερο από το νερό, το οποίο το κρατάμε σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια (βλέπε σχήμα).



(α) Αν το αφήσουμε, βρείτε την εξίσωση που καθορίζει το ύψος h' που θα φτάσει το σώμα έξω από το νερό.
Δίνονται το βάρος mg όπου m η μάζα του σώματος, η συνισταμένη βάρους–άνωσης mg', το ύψος h και ότι η δύναμη αντίστασης που δέχεται το σώμα από το νερό είναι $F_\alpha = \lambda m v$, με σταθερό λ. (Αγνοούμε την αντίσταση αέρα.)
Ίσως χρειαστείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{\xi\, d\xi}{1-\xi} = \int \left(-1 + \frac{1}{1-\xi}\right) d\xi = -\xi - \ln|1-\xi| +$ σταθερά.
(β) Αν αφήνουμε το σώμα από ολοένα και μεγαλύτερα βάθη h, το ύψος h' αυξάνεται συνεχώς; Αν υπάρχει μέγιστη τιμή αυτού του ύψους $h'_{\max}$ μπορείτε να την υπολογίσετε χωρίς να λύσετε καμία διαφορική εξίσωση;

---

3. Έστω πεδίο δύναμης $\vec{F} = \lambda r \sin(2\theta)\cos\phi\ \hat{r} + r\cos(2\theta)\cos\phi\ \hat{\theta} - r\cos\theta\sin\phi\ \hat{\phi}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες, με $\lambda =$ σταθερά.
(α) Ποιο το έργο της $\vec{F}$ για την κλειστή διαδρομή Ο→Α→Β→Ο του σχήματος; Οι διαδρομές ΟΑ και ΒΟ είναι ευθύγραμμες, ενώ η ΑΒ είναι τμήμα κύκλου μοναδιαίας ακτίνας με κέντρο το Ο.



(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να κρίνουμε για ποια τιμή της σταθεράς λ ίσως η $\vec{F}$ είναι συντηρητική;
Για αυτή τη τιμή του λ είναι πράγματι συντηρητική;
Αν ναι, ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(r,\theta,\phi)$;

ΛΥΣΕΙΣ:

1. (α) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = mv\dot{v}$ μηδενίζεται αν η επιτρόχια επιτάχυνση είναι μηδενική ($\dot{v} = 0$), αλλά και όταν $v = 0$, $\dot{v} \neq 0$. Άρα η πρόταση δεν είναι γενικά σωστή.

(β) Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\dfrac{v^2}{\mathcal{R}}$ μηδενίζεται αν $\mathcal{R} = \infty$ (που σημαίνει τοπικά ευθύγραμμη τροχιά), αλλά και όταν $v = 0$, $\mathcal{R} < \infty$. Άρα η πρόταση δεν είναι γενικά σωστή.

(γ) Όχι διότι αλλάζει φορά (μόνο το μέτρο είναι σταθερό).

(δ) Είναι $v = v_0 e^{-ct}$, οπότε $\dot{v} = -cv$, $|\dot{v}| = cv$. Αντικαθιστώντας στην $|\dot{v}| = \dfrac{v^2}{\mathcal{R}}$ προκύπτει $R = \dfrac{v}{c}$.

2. (α) Όσο το σώμα είναι μέσα στο νερό, δηλ. για $-h < z < 0$, είναι $m\dot{\vec{v}} = m\vec{g}' - \lambda m\vec{v}$. Αφού το σώμα είναι ελαφρύτερο από το νερό η συνισταμένη βάρους και άνωσης $m\vec{g}'$ έχει φορά προς τα πάνω και θα οδηγήσει σε κίνηση του σώματος προς τα πάνω ($v > 0$). Επομένως η αλγεβρική έκφραση του νόμου Νεύτωνα είναι $m\dot{v} = mg' - \lambda mv$. Με $\dot{v} = v\dfrac{dv}{dz}$ βρίσκουμε $v\dfrac{dv}{dz} = g' - \lambda v \Leftrightarrow$

$$\int_0^v \frac{v\,dv}{g'-\lambda v} = \int_{-h}^z dz \Leftrightarrow \int_0^{\lambda v/g'} \frac{(\lambda v/g')\,d(\lambda v/g')}{1-\lambda v/g'} = \frac{\lambda^2}{g'}\int_{-h}^z dz \Leftrightarrow -\frac{\lambda v}{g'} - \ln\left(1-\frac{\lambda v}{g'}\right) = \frac{\lambda^2}{g'}(z+h).$$

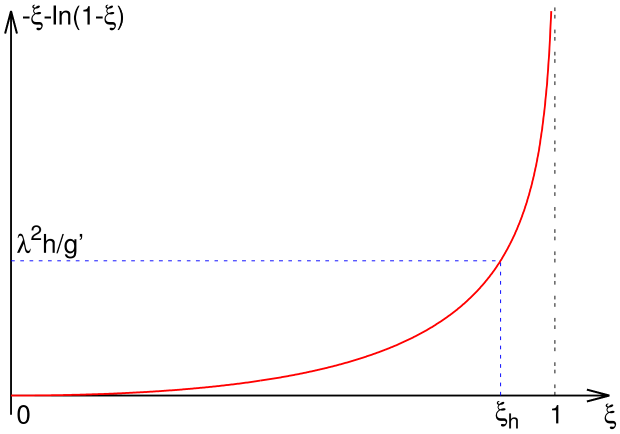
Θα μπορούσαμε από το νόμο Νεύτωνα $\dot{v} = g' - \lambda v$ (ο οποίος μπορεί να ειδωθεί σαν μια γραμμική μη-ομογενής διαφορική εξίσωση $\dot{v} + \lambda v = g'$ ή σαν χωριζομένων μεταβλητών $\dfrac{dv}{g'-\lambda v} = dt$) να βρίσκαμε την $v(t) = Ce^{-\lambda t} + \dfrac{g'}{\lambda}$ και τη σταθερά ολοκλήρωσης από τις αρχικές συνθήκες $C = -\dfrac{g'}{\lambda}$, δηλ. να βρίσκαμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου $v = \dfrac{g'}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$. Στην συνέχεια να βρίσκαμε την $z(t)$ από $\dot{z} = v(t) \Leftrightarrow \displaystyle\int_{-h}^z dz = \int_0^t \frac{g'}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)dt \Leftrightarrow z = -h + \frac{g'}{\lambda}t - \frac{g'}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$. Τέλος, απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ των $v = v(t)$ και $z = z(t)$ θα βρίσκαμε την σχέση μεταξύ ταχύτητας και ύψους. Είναι $v = \dfrac{g'}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right) \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{\lambda}\ln\left(1-\dfrac{\lambda v_0}{g'}\right)$. Έτσι η $z = -h + \dfrac{g'}{\lambda}t - \dfrac{g'}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$ δίνει $z = -h - \dfrac{g'}{\lambda^2}\ln\left(1-\dfrac{\lambda v_0}{g'}\right) - \dfrac{v}{\lambda}$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος να βρίσκαμε την $z(t)$ θα ήταν να γράφαμε το νόμο Νεύτωνα σαν μια γραμμική μη-ομογενή διαφορική εξίσωση για το $z(t)$, δηλ. $\ddot{z} + \lambda\dot{z} = g'$. Μια μερική λύση είναι $z_{\mu\varepsilon\rho} = ct$ με την αντικατάσταση να δίνει $c = \dfrac{g'}{\lambda}$, ενώ η λύση της ομογενούς είναι $z_{o\mu} = c_1 + c_2 e^{-\lambda t}$. Η γενική λύση είναι λοιπόν $z = \dfrac{g'}{\lambda}t + c_1 + c_2 e^{-\lambda t}$ και η αντίστοιχη ταχύτητα $\dot{z} = \dfrac{g'}{\lambda} - c_2\lambda e^{-\lambda t}$. Από τις αρχικές συνθήκες $z|_{t=0} = -h$, $\dot{z}|_{t=0} = 0$ βρίσκουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης $c_1 = -h - \dfrac{g'}{\lambda^2}$, $c_2 = \dfrac{g'}{\lambda^2}$. Άρα $z = -h + \dfrac{g'}{\lambda}t - \dfrac{g'}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$ και $v = \dot{z} = \dfrac{g'}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t}\right)$.

Επομένως όταν το σώμα θα φτάσει στην επιφάνεια $z = 0$ θα έχει ταχύτητα v_0 που δίνεται μέσω της σχέσης $-\dfrac{\lambda v_0}{g'} - \ln\left(1-\dfrac{\lambda v_0}{g'}\right) = \dfrac{\lambda^2 h}{g'}$.

Η κίνηση έξω από το νερό γίνεται υπό την επίδραση μόνο του βάρους, επομένως το σώμα φτάνει σε ύψος $h' = \dfrac{v_0^2}{2g}$. Άρα η εξίσωση που καθορίζει το h' είναι η $-\dfrac{\lambda v_0}{g'} - \ln\left(1-\dfrac{\lambda v_0}{g'}\right) = \dfrac{\lambda^2 h}{g'}$ με $v_0 = \sqrt{2gh'}$, δηλ. η $-\dfrac{\lambda\sqrt{2gh'}}{g'} - \ln\left(1-\dfrac{\lambda\sqrt{2gh'}}{g'}\right) = \dfrac{\lambda^2 h}{g'}$.

Θα μπορούσαμε να βρούμε γραφικά τη λύση μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $-\xi-\ln(1-\xi)$ η οποία φαίνεται δίπλα (είναι γνησίως αύξουσα, ξεκινά από το 0 στο $\xi=0$ και απειρίζεται στο $\xi=1^-$). Αν ξέρουμε το ύψος h τότε ξέρουμε την τεταγμένη $\dfrac{\lambda^2 h}{g'}$. Η γραφική παράσταση μας δίνει την τετμημένη ξ_h η οποία είναι ίση με $\dfrac{\lambda\sqrt{2gh'}}{g'}$ κι έτσι βρίσκουμε το ύψος $h'=\dfrac{g'^2\xi_h^2}{2g\lambda^2}$.



(β) Αν αυξάνουμε το h τότε η ταχύτητα v_0 θα αυξάνεται και θα πλησιάζει την οριακή της τιμή. Συνεπώς θα αυξάνεται και το ύψος h', αλλά θα πλησιάζει και αυτό μια οριακή τιμή.

Η οριακή ταχύτητα αντιστοιχεί σε μηδενική συνολική δύναμη και άρα $mg'=\lambda m v_{\text{ορ}} \Leftrightarrow v_{\text{ορ}}=\dfrac{g'}{\lambda}$.

Το αντίστοιχο μέγιστο (οριακό) ύψος είναι $h'_{\max}=\dfrac{v_{\text{ορ}}^2}{2g}=\dfrac{g'^2}{2g\lambda^2}$.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από τη γραφική λύση. Όσο αυξάνεται το h αυξάνεται και το ξ_h άρα και το h'. Υπάρχει όμως μέγιστη (οριακή) τιμή του ξ_h που είναι μονάδα. Η αντίστοιχη οριακή τιμή του h' είναι $\dfrac{g'^2}{2g\lambda^2}$.

---

3. (α) Για τη διαδρομή ΟΑ είναι $r=0\to 1$, $\theta=\pi/4$, $\phi=0$. Άρα $d\vec{r}=dr\hat{r}$, $\vec{F}=\lambda r\hat{r}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r}=\lambda r dr$ και $W_{\text{OA}}=\displaystyle\int_0^1 \lambda r dr=\frac{\lambda}{2}$.

Για τη διαδρομή ΑΒ είναι $r=1$, $\theta=\pi/4\to\pi/2$, $\phi=0$. Άρα $d\vec{r}=d\theta\hat{\theta}$, $\vec{F}=\lambda\sin(2\theta)\hat{r}+\cos(2\theta)\hat{\theta}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r}=\cos(2\theta)d\theta$ και $W_{\text{AB}}=\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(2\theta)d\theta=-\frac{1}{2}$.

Για τη διαδρομή ΒΟ είναι $r=1\to 0$, $\theta=\pi/2$, $\phi=0$. Άρα $d\vec{r}=dr\hat{r}$, $\vec{F}=-\cos\phi\hat{\theta}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$ και $W_{\text{BO}}=0$.

(β) Το συνολικό έργο στην κλειστή διαδρομή Ο→Α→Β→Ο είναι $W_{\text{OABO}}=\dfrac{\lambda-1}{2}$. Αναγκαία (όχι ικανή) συνθήκη για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική είναι το έργο αυτό να μηδενίζεται, δηλ. $\lambda=1$. Για να είναι πράγματι συντηρητική πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $V(r,\theta,\phi)$ τέτοια ώστε $\vec{F}=-\vec{\nabla}V$
$\Leftrightarrow \left\{ r\sin(2\theta)\cos\phi=-\dfrac{\partial V}{\partial r}\,,\quad r\cos(2\theta)\cos\phi=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\,,\quad -r\cos\theta\sin\phi=-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\phi}\right\}$.

Ολοκληρώνοντας την πρώτη βρίσκουμε $V=-\dfrac{1}{2}r^2\sin(2\theta)\cos\phi+f(\theta,\phi)$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη και στην τρίτη βρίσκουμε $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=0$ και $\dfrac{\partial f}{\partial\phi}=0$ (χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$), άρα η f είναι μια σταθερά. Επομένως η δύναμη είναι συντηρητική για $\lambda=1$ και η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V=-\dfrac{1}{2}r^2\sin(2\theta)\cos\phi+$σταθερά.
