Μηχανική Ι – Εργασία #2

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016 Ν. Βλαχάκης

---

1. Σώμα διαγράφει την καρδιοειδή καμπύλη η οποία σε πολικές συντεταγμένες έχει εξίσωση $\varpi = 1 - \cos\phi$, έχοντας ταχύτητα σταθερού μέτρου $|\vec{v}| = 2$ (σε κατάλληλες μονάδες). Αν για $t = 0$ ξεκινά από την αρχή των αξόνων βρείτε τη σχέση μεταξύ ϕ και t. Σε πόσο χρόνο το σώμα θα ξαναγυρίσει στο σημείο εκκίνησης;
Δίνεται $1 - \cos\xi = 2\sin^2\dfrac{\xi}{2}$.

---

2. Κυλινδρική έλικα έχει εξίσωση $\{\varpi = R\,, z = \lambda\phi\}$ (R είναι η ακτίνα και $2\pi\lambda$ το βήμα της έλικας). Δαχτυλίδι είναι περασμένο στην έλικα αυτή και κινείται με τρόπο ώστε $\phi(t) = \dfrac{\beta}{\gamma}\ln(1+\gamma t)$. (Τα R, λ, β, γ είναι θετικές σταθερές.)
(α) Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του σε κάθε χρόνο, σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
(β) Βρείτε την επιτρόχια ($\vec{a}_\varepsilon$) και κεντρομόλο ($\vec{a}_\kappa$) επιτάχυνση.
(γ) Δείξτε ότι τα μέτρα των $\vec{a}_\varepsilon$ και $\vec{a}_\kappa$ έχουν σταθερό λόγο και άρα η δεδομένη κίνηση του δαχτυλιδιού μπορεί να είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης τριβής ολίσθησης σταθερού συντελεστή μ (η κάθετη αντίδραση από την έλικα $\vec{N} = m\vec{a}_\kappa$ και η τριβή $\vec{T} = m\vec{a}_\varepsilon$ σχετίζονται τότε με $|\vec{T}| = \mu|\vec{N}|$).
(δ) Δείξτε ότι η επιτρόχια επιτάχυνση είναι αντίρροπη της ταχύτητας και με μέτρο ανάλογο του v^2, οπότε η δεδομένη κίνηση του δαχτυλιδιού μπορεί να είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης δύναμης αντίστασης αέρα ανάλογης του τετραγώνου της ταχύτητας.

---

3. Σχεδιάστε την κίνηση σώματος του οποίου οι σφαιρικές συντεταγμένες σε κάθε χρόνο είναι $r = 1$, $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\sin t$, $\phi = \dfrac{t}{6}$. Είναι περιοδική; Υπάρχουν χρόνοι όπου η επιτρόχια επιτάχυνση είναι μηδέν;

ΛΥΣΕΙΣ:

---

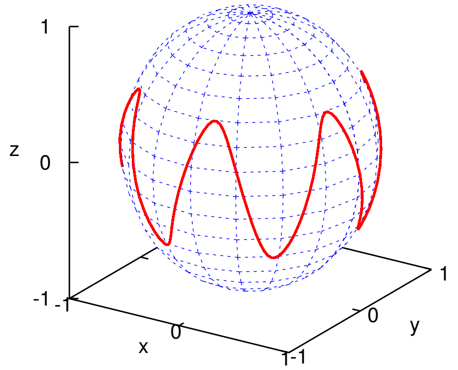
1. $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} = \sin\phi\ \dot{\phi}\hat{\varpi} + (1-\cos\phi)\dot{\phi}\hat{\phi}$, $|\vec{v}| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2-2\cos\phi}|\dot{\phi}| = 2 \Leftrightarrow \sin\frac{\phi}{2}\dot{\phi} = \pm 1$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (είναι χωριζομένων μεταβλητών) και θέτοντας $\phi|_{t=0} = 0$ ($\varpi|_{t=0} = 0$ σημαίνει $\phi|_{t=0} = 0$) έχουμε $\int_0^{\phi} \sin\frac{\phi}{2}\, d\phi = \pm\int_0^{t} dt \Leftrightarrow 2 - 2\cos\frac{\phi}{2} = \pm t \Leftrightarrow \sin^2\frac{\phi}{4} = \pm\frac{t}{4}$.
Αλλιώς: Μπορούμε να δουλέψουμε με αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sin\frac{\phi}{2}\, d\phi = \pm\int dt \Leftrightarrow -2\cos\frac{\phi}{2} + C = \pm t$ και να βρούμε τη σταθερά ολοκλήρωσης από την αρχική συνθήκη $\phi|_{t=0} = 0$.
Μόνο το πάνω πρόσημο είναι δεκτό (αφού $t \geq 0$), δηλ. η σχέση γωνίας–χρόνου είναι $\sin^2\frac{\phi}{4} = \frac{t}{4}$.
Το ότι μόνο το πάνω πρόσημο είναι δεκτό θα μπορούσαμε να το περιμένουμε και από την σχέση $\sin\frac{\phi}{2}\dot{\phi} = \pm 1$. Αρχικά $\phi = 0$ και αν $\dot{\phi} > 0 (< 0)$ η γωνία μεγαλώνει (μικραίνει), δηλ. γίνεται θετική (αρνητική), οπότε και το $\sin\frac{\phi}{2}$ γίνεται θετικό (αρνητικό). Και στις δύο περιπτώσεις $\sin\frac{\phi}{2}\dot{\phi} > 0$.
Το σώμα θα ξαναγυρίσει στο σημείο εκκίνησης όταν $\phi = \pm 2\pi \Leftrightarrow t = 4$. (Τα δύο πρόσημα αντιστοιχούν στις δύο φορές περιστροφής.)

---

2. (α) $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$ και θέτοντας $\varpi = R$, $\phi = \frac{\beta}{\gamma}\ln(1+\gamma t)$ και $z = \lambda\phi$ προκύπτει $\vec{v} = \frac{\beta}{1+\gamma t}\left(R\hat{\phi} + \lambda\hat{z}\right)$.
Όμοια $\vec{a} = \left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi} + \left(\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z} = -\frac{R\beta^2\hat{\varpi} + R\beta\gamma\hat{\phi} + \lambda\beta\gamma\hat{z}}{(1+\gamma t)^2}$.
(β) $\hat{\varepsilon} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{R\hat{\phi} + \lambda\hat{z}}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}$, $\vec{a}_\varepsilon = (\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon})\hat{\varepsilon} = -\frac{\beta\gamma\sqrt{R^2+\lambda^2}}{(1+\gamma t)^2}\hat{\varepsilon}$, $\vec{a}_\kappa = \vec{a} - \vec{a}_\varepsilon = -\frac{R\beta^2}{(1+\gamma t)^2}\hat{\varpi}$.
(γ) $\frac{|\vec{a}_\varepsilon|}{|\vec{a}_\kappa|} = \frac{\gamma\sqrt{R^2+\lambda^2}}{R\beta}$ = σταθερά, οπότε η κίνηση του δαχτυλιδιού μπορεί να είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης τριβής ολίσθησης σταθερού συντελεστή $\mu = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} = \frac{|\vec{a}_\varepsilon|}{|\vec{a}_\kappa|} = \frac{\gamma\sqrt{R^2+\lambda^2}}{R\beta}$.
(δ) Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι αντίρροπη της ταχύτητας αφού $\vec{a}\cdot\hat{\varepsilon} < 0$. Είναι $\frac{|\vec{a}_\varepsilon|}{v^2} = \frac{\gamma}{\beta\sqrt{R^2+\lambda^2}}$ = σταθερά, οπότε η δεδομένη κίνηση του δαχτυλιδιού μπορεί να είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης δύναμης αντίστασης αέρα $\vec{F}_{\text{αντ}} = -\frac{m\gamma}{\beta\sqrt{R^2+\lambda^2}}v^2\hat{\varepsilon}$. (Στο σώμα επιδρά και κάθετη αντίσταση από την έλικα, $\vec{N} = m\vec{a}_\kappa$.)

---

3. Κίνηση σε σφαίρα ακτίνας $r = 1$, σε μια λωρίδα $\Delta\theta = \pi/3 = 60^\circ$ γύρω από τον «ισημερινό» $\theta = \pi/2$ (αφού $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ή σε μοίρες $90 - 30 \leq \theta \leq 90 + 30$).
Η περίοδος της $\theta(t)$ είναι $T_\theta = 2\pi$. Η περίοδος των $\sin\phi = \sin\frac{t}{6}$ και $\cos\phi = \cos\frac{t}{6}$ είναι $T_\phi = 12\pi$. Η περίοδος της κίνησης είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των T_θ και T_ϕ, δηλ. $T = 12\pi$.
(Ο χρόνος T αντιστοιχεί σε 6 περιόδους της $\theta(t)$.)



Για να είναι $a_\varepsilon = 0$ πρέπει $\dot{v} = 0$. Είναι $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} = \frac{\pi}{6}\cos t\ \hat{\theta} + \frac{1}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\sin t\right)\hat{\phi}$. Το μέτρο της ταχύτητας δεν μηδενίζεται ποτέ (οι εξισώσεις $\cos t = 0\,, \cos\left(\frac{\pi}{6}\sin t\right) = 0$ δεν συναληθεύουν), οπότε μηδενισμός της $\dot{v}$ σημαίνει μηδενισμός του $\frac{d}{dt}v^2$. Άρα $\frac{d}{dt}v^2 = 0 \Leftrightarrow \cos t\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin t\right) + 12\pi\sin t\right] = 0$, δηλ. $\cos t = 0$ ή $\sin t = 0$. Επομένως $a_\varepsilon = 0$ στους χρόνους $t = k\pi/2$ με k ακέραιο, δηλ. στα σημεία $\theta = \pi/2 \pm \pi/6$ και $\theta = \pi/2$.

Το ίδιο προκύπτει από την έκφραση της επιτάχυνσης στις σφαιρικές που δίνει $a_r = -\frac{\pi^2}{36}\cos^2 t - \frac{1}{36}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\sin t\right)$, $a_\theta = \frac{1}{72}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sin t\right) - \frac{\pi}{6}\sin t$, $a_\phi = -\frac{\pi}{18}\cos t\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\sin t\right)$. Η εξίσωση $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0$ έχει λύσεις $\cos t = 0$ και $\sin t = 0$.
