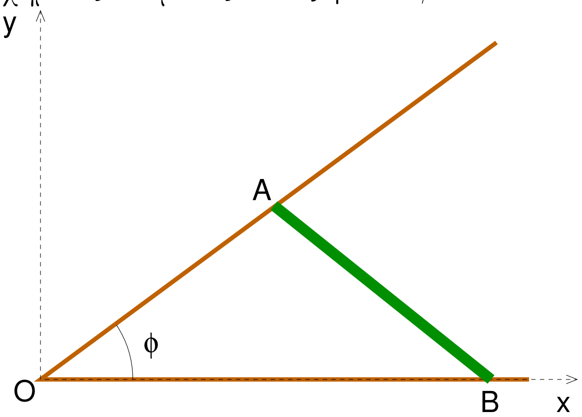
Μηχανική Ι – Εργασία #1

Χειμερινό εξάμηνο 2015-2016 Ν. Βλαχάκης

1. Στο διαγώνισμα της Μηχανικής Ι χρειάζεται να χρησιμοποιήσετε τον τύπο της κεντρομόλου δύναμης για μια κυκλική κίνηση. Δεν τον θυμάστε, αλλά ξέρετε ότι εμπλέκει τη μάζα του σώματος, την ταχύτητά του και την ακτίνα της τροχιάς. Βοηθάει η διαστατική ανάλυση να βρείτε τον τύπο;

2. Μια ράβδος έχει σταθερό μήκος L και τα άκρα της A και B κινούνται πάνω στις σταθερές ράγες του σχήματος που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ϕ.



Έστω η ράβδος αρχικά είναι οριζόντια (δηλ. $\vec{r}_{\mathrm{A}} = 0$, $\vec{r}_{\mathrm{B}} = L\hat{x}$) και κινούμε το άκρο της A με σταθερή ταχύτητα u μέχρι να γίνει κατακόρυφη.
(α) Ποιο το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ του άκρου A σε κάθε χρόνο t;
(β) Απαιτώντας $|\vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}| = L$ βρείτε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{\mathrm{B}} = x\hat{x}$ του άκρου B σε κάθε χρόνο t.
(γ) Ποια η ταχύτητα $\dot{x}$ του άκρου B; Διερευνήστε σε ποιους χρόνους είναι θετική και πότε μηδενίζεται. Ποια η θέση της ράβδου όταν μηδενίζεται;
(δ) Ποια η επιτάχυνση του άκρου B;
Προαιρετικά: (ε) Έστω η ράβδος είναι αβαρής και στα άκρα της A και B είναι στερεωμένες δύο ίσες μάζες m που μπορούν να κινούνται πάνω στις ράγες. Αν OA$= r(t)$ βρείτε την OB$= x(t)$ συναρτήσει της $r(t)$, καθώς και την ταχύτητα $\dot{x}$ συναρτήσει της συνάρτησης r και της παραγώγου της $\dot{r}$. Αν αγνοήσουμε το βάρος και αρχικά είναι $r|_{t=0} = 0$ και $\dot{r}|_{t=0} = u$, από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας βρείτε την διαφορική εξίσωση που καθορίζει την συνάρτηση $r(t)$. Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή γράφεται $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V(r) = 0$ με $V(r) = -\dfrac{mu^2}{2}\dfrac{1+\cos^2\phi}{1+\left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

1. Υποθέτοντας σχέση της μορφής $F \propto m^a v^\beta R^\gamma$ βρίσκουμε τους εκθέτες με διαστατική ανάλυση, αναλύοντας τις μονάδες όλων των μεγεθών στις βασικές μονάδες μήκους $[L]$, μάζας $[M]$ και χρόνου $[T]$. Η δύναμη έχει μονάδες $[M]\dfrac{[L]}{[T]^2}$ (όπως προκύπτει από τον τύπο $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$) και η ταχύτητα $\dfrac{[L]}{[T]}$.

Άρα $F \propto m^a v^\beta R^\gamma \Leftrightarrow [M]\dfrac{[L]}{[T]^2} = [M]^a \left(\dfrac{[L]}{[T]}\right)^\beta [L]^\gamma \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = \beta + \gamma \\ 1 = a \\ -2 = -\beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{array} \right\}$

Δηλ. ισχύει $F \propto \dfrac{mv^2}{R}$. Η σταθερά αναλογίας είναι μονάδα (αυτό δεν το δίνει η διαστατική ανάλυση).

2. (α) Αν r η απόσταση του Α από το Ο (σε τυχαίο χρόνο) το διάνυσμα θέσης του άκρου Α είναι $\vec{r}_{\rm A} = r\hat{r} = r\left(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}\right)$.
Το ίδιο από $\vec{r}_{\rm A} = x\hat{x} + y\hat{y}$ με $x = r\cos\phi$ και $y = r\sin\phi$.
Η ταχύτητα του Α είναι $\vec{v}_{\rm A} = \dot{\vec{r}}_{\rm A} = \dot{r}\left(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}\right)$ και αφού έχει σταθερό μέτρο u είναι $|\dot{r}| = u$. Προφανώς $\dot{r} > 0$ οπότε $\dfrac{dr}{dt} = u \Leftrightarrow r = ut + C$. Αρχικά $r|_{t=0} = 0$, οπότε η σταθερά ολοκλήρωσης είναι μηδέν και άρα $r = ut$. Επομένως το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_{\rm A}$ του άκρου Α σε κάθε χρόνο t είναι $\vec{r}_{\rm A} = ut\left(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}\right)$.
(β) $|\vec{r}_{\rm B} - \vec{r}_{\rm A}| = L \Leftrightarrow |x\hat{x} - r\left(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}\right)| = L \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - r\cos\phi\right)^2 + \left(r\sin\phi\right)^2} = L \Leftrightarrow |x - r\cos\phi| = \sqrt{L^2 - \left(r\sin\phi\right)^2} \Leftrightarrow x = r\cos\phi \pm \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}$. Επειδή αρχικά είναι $\vec{r}_{\rm A} = 0$ και $\vec{r}_{\rm B} = L\hat{x}$, δηλ. $r = 0$ και $x = L$, επιλέγουμε το πάνω πρόσημο.
Μετά τη στιγμή που ο όρος $\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}$ μηδενίζεται θα μπορούσε η λύση να μεταπηδήσει στον άλλο κλάδο και θα έπρεπε να σκεφτούμε εκ νέου ποιο πρόσημο να επιλέξουμε. Για την δεδομένη κίνηση όμως μας ενδιαφέρουν οι χρόνοι μέχρι η ράβδος να γίνει κατακόρυφη, δηλ. $y_{\rm A} < L \Leftrightarrow r\sin\phi < L$ στους οποίους ο παραπάνω όρος παραμένει θετικός.
Άρα το διάνυσμα θέσης του άκρου Β είναι $\vec{r}_{\rm B} = x\hat{x}$ με $x = r\cos\phi + \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}$ και $r = ut$.
Θα μπορούσαμε να βρούμε άμεσα το x από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ, δηλ. $AB = \sqrt{(OA)^2 + (OB^2) - 2(OA)(OB)\cos(A\hat{O}B)}$.
Ένας τρίτος τρόπος εμπλέκει την οξεία γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα x, η οποία μπορεί να βρεθεί από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ, δηλ. $\dfrac{\sin\theta}{r} = \dfrac{\sin\phi}{L}$ (ισοδύναμα οι προβολές των ΟΑ και ΑΒ στον άξονα y είναι ίσες, δηλ. $r\sin\phi = L\sin\theta$). Το μήκος x είναι το άθροισμα των προβολών των μηκών ΟΑ και ΑΒ στον άξονα x, δηλ. $x = r\cos\phi + L\cos\theta = r\cos\phi + L\sqrt{1 - \sin^2\theta} = r\cos\phi + L\sqrt{1 - \left(\dfrac{r}{L}\sin\phi\right)^2} = r\cos\phi + \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}$.
(γ) Η ταχύτητα του Β είναι $\dot{x}\hat{x}$ με $\dot{x} = \dot{r}\dfrac{dx}{dr} = \dot{r}\left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)$ με $r = ut$ και $\dot{r} = u$.
Είναι θετική όταν $\cos\phi > \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}} \Leftrightarrow r < L\cot\phi$, μηδενίζεται όταν $r = L\cot\phi$ και αρνητική όταν $r > L\cot\phi$.
Όταν μηδενίζεται, η σχέση $r = L\cot\phi$ σημαίνει ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α (οπότε $\cot\phi = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{r}{L}$), δηλ. η ράβδος είναι κάθετη στην πλάγια ράγα.

(δ) Η επιτάχυνση του Β είναι $\ddot{x}\hat{x}$ με $\ddot{x} = \dfrac{d}{dt}\left(u\cos\phi - \dfrac{u^2 t\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - u^2t^2\sin^2\phi}}\right) = -\dfrac{L^2u^2\sin^2\phi}{\left(L^2 - u^2t^2\sin^2\phi\right)^{3/2}}$.

(ε) Όπως πριν βρίσκουμε $x = r\cos\phi + \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}$ και $\dot{x} = \dot{r}\left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)$.
Η μάζα στο Α έχει θέση $\vec{r}_{\mathrm{A}} = r\left(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}\right)$, ταχύτητα $\vec{v}_{\mathrm{A}} = \dot{r}\left(\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}\right)$ και κινητική ενέργεια $\dfrac{mv_{\mathrm{A}}^2}{2} = \dfrac{m\dot{r}^2}{2}$.
Η μάζα στο Β έχει θέση $\vec{r}_{\mathrm{B}} = x\hat{x} = \left(r\cos\phi + \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}\right)\hat{x}$, ταχύτητα $\vec{v}_{\mathrm{B}} = \dot{x}\hat{x} = \dot{r}\left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)\hat{x}$ και κινητική ενέργεια $\dfrac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2} = \dfrac{m\dot{r}^2}{2}\left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2$.
Η συνολική ενέργεια είναι $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{m\dot{r}^2}{2}\left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2 = E =$ σταθερά. Η τιμή της σταθεράς E μπορεί να βρεθεί από τις αρχικές συνθήκες $r|_{t=0} = 0$ και $\dot{r}|_{t=0} = u$ και προκύπτει $E = \dfrac{mu^2}{2}\left(1 + \cos^2\phi\right)$. Άρα το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\dot{r}^2\left[1 + \left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2\right] = u^2\left(1 + \cos^2\phi\right)$, σχέση που αποτελεί διαφορική εξίσωση που καθορίζει την συνάρτηση $r(t)$.
Η εξίσωση αυτή γράφεται $\dot{r}^2 - \dfrac{u^2\left(1 + \cos^2\phi\right)}{1 + \left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2} = 0$, ή ισοδύναμα $\dfrac{m\dot{r}^2}{2} + V(r) = 0$ με $V(r) = -\dfrac{mu^2}{2}\dfrac{1 + \cos^2\phi}{1 + \left(\cos\phi - \dfrac{r\sin^2\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)^2}$.
