Μηχανική Ι – Εργασία #7

Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015 Ν. Βλαχάκης

---

1. Έστω μια αμείωτη ταλάντωση έχει περίοδο $T_0 = 1$ s. Αν επιπλέον της δύναμης επαναφοράς ασκείται και τριβή $-2m\gamma\vec{v}$ η περίοδος γίνεται $T = 1.001$ s. Ποιο το γ; Πόσο μειώνεται το πλάτος ταλάντωσης μετά από 10 περιόδους; Ποιο είναι πιο σημαντικό, η αλλάγη στην περίοδο ή στο πλάτος ταλάντωσης;

---

2. Για να μελετήσουμε κλασικά τη διάδοση του φωτός μέσα σε μονωτικά υλικά θεωρούμε ότι τα ηλεκτρόνια του υλικού δέχονται δύναμη επαναφοράς $-m_e\omega_0^2\vec{r}$ όταν απομακρύνονται κατά $\vec{r}$ από τη θέση ισορροπίας τους, δύναμη απόσβεσης $-2m_e\gamma\vec{v}$ και δύναμη από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο η οποία για επίπεδο μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται στην $\hat{z}$ κατεύθυνση είναι $-e\vec{E} = -eE_0\cos(\omega t - kz)\hat{x}$ (η δύναμη από το μαγνητικό πεδίο του κύματος είναι αμελητέα). Για το συγκεκριμένο κύμα η κίνηση των ηλεκτρονίων θα γίνει παράλληλα στον άξονα $x'x$.
(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης για ηλεκτρόνια με θέση ισορροπίας $(x = 0, y = 0, z)$ και $\vec{r} = x\hat{x}$.
(β) Λύστε την εξίσωση και βρείτε το $x(t)$ αγνοώντας τους φθίνοντες όρους της λύσης.
(γ) Υπολογίστε την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = -ne\vec{v}$, όπου n η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων (τα πρωτόνια σαν πολύ βαρύτερα θεωρούνται ακίνητα).
(δ) Δείξτε ότι λόγω της απόσβεσης η μέση ενέργεια που χάνεται ανά χρόνο στη μονάδα όγκου του υλικού είναι $<\vec{J}\cdot\vec{E}>$ και υπολογίστε αυτή τη μέση τιμή.

ΛΥΣΕΙΣ:

1. Αφού η κίνηση είναι «περιοδική» η απόσβεση είναι ασθενής και $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow \gamma = \omega_0\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2} = 0.281\ \mathrm{s}^{-1}$.
Το πλάτος μειώνεται σαν $e^{-\gamma t}$. Για $t = 10T$ είναι $e^{-\gamma t} = e^{-0.281\times 10\times 1.001} = 0.060$, δηλ. μειώθηκε κατά 60%. Προφανώς η μείωση του πλάτους είναι σημαντικότερη από την αύξηση στην περίοδο.

---

2. (α) $m_e\ddot{\vec{r}} = -m_e\omega_0^2\vec{r} - 2m_e\gamma\vec{v} - e\vec{E}$ ή με $\vec{r} = x\hat{x}$, $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -(eE_0/m_e)\cos(\omega t - kz)$.
(β) Η λύση είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς και της μερικής λύσης. Αφού υπάρχει απόσβεση η λύση της ομογενούς φθίνει εκθετικά με το χρόνο και μπορεί να αγνοηθεί. Η μερική λύση είναι της μορφής $x = A\cos(\omega t - kz) + B\sin(\omega t - kz)$. Τα A και B μπορούν να βρεθούν αφού αντικαταστήσουμε τη μορφή αυτή στην διαφορική, όπως κάναμε στο μάθημα. Εδώ παρουσιάζω ένα δεύτερο τρόπο: Αφού η εξίσωση είναι γραμμική, η $x(t)$ είναι το πραγματικό μέρος της $\zeta(t)$ η οποία ικανοποιεί την $\ddot{\zeta} + 2\gamma\dot{\zeta} + \omega_0^2\zeta = -(eE_0/m_e)e^{-i(\omega t - kz)}$. Η μερική λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης είναι $\zeta = Ce^{-i(\omega t-kz)}$ με την αντικατάσταση να δίνει $C = -\frac{eE_0/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} = -\frac{eE_0}{m_e}\frac{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = -\frac{eE_0}{m_e}\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$, όπου $\cos\phi = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$ και $\sin\phi = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$. Έτσι η λύση είναι $\zeta = -\frac{eE_0}{m_e}\frac{e^{-i(\omega t-kz-\phi)}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$ και το πραγματικό της μέρος $x = -\frac{eE_0}{m_e}\frac{\cos(\omega t-kz-\phi)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$.
(γ) $\vec{J} = -ne\dot{x}\hat{x} = -\frac{ne^2\omega E_0/m_e}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}\sin(\omega t-kz-\phi)\hat{x}$.
(δ) Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση, όση ενέργεια χάνεται ανά περίοδο $T = 2\pi/\omega$ λόγω της απόσβεσης τόση ενέργεια δίνει ο διεγέρτης (ώστε το πλάτος να μένει σταθερό).
Ισχύει δηλ. $\int_t^{t+T} 2m_e\gamma\vec{v}\cdot\vec{v}dt = \int_t^{t+T}(-e\vec{E})\cdot\vec{v}dt$ κάτι που μπορεί να δειχθεί και μέσω της εξίσωσης κίνησης: $\int_t^{t+T}\left(2m_e\gamma\vec{v}+e\vec{E}\right)\cdot\vec{v}dt = \int_t^{t+T}\left(-m_e\ddot{\vec{r}} - m_e\omega_0^2\vec{r}\right)\cdot\dot{\vec{r}}dt = -\frac{m_e}{2}\left[\dot{\vec{r}}^2 + \omega_0^2\vec{r}^2\right]_t^{t+T} = 0.$
Για ένα ηλεκτρόνιο οι απώλειες ανά χρόνο είναι λοιπόν $\frac{1}{T}\int_t^{t+T}(-e\vec{E})\cdot\vec{v}dt$ και αν έχουμε n ηλεκτρόνια ανά όγκο οι απώλειες ανά χρόνο στη μονάδα του όγκου είναι $\frac{1}{T}\int_t^{t+T}(-ne\vec{E})\cdot\vec{v}dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\vec{J}\cdot\vec{E}dt = <\vec{J}\cdot\vec{E}>$.
Η τιμή της είναι $<\vec{J}\cdot\vec{E}> = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{-ne^2\omega E_0^2/m_e}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}\sin(\omega t-kz-\phi)\cos(\omega t-kz)dt = \frac{ne^2\omega E_0^2/m_e}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}\left[\sin\phi\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\cos^2(\omega t-kz)dt - \cos\phi\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin(\omega t-kz)\cos(\omega t-kz)dt\right]$.
Αντικαθιστώντας $\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\cos^2(\omega t-kz)dt = \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin(\omega t-kz)\cos(\omega t-kz)dt = 0$ βρίσκουμε $<\vec{J}\cdot\vec{E}> = \frac{ne^2\omega E_0^2/m_e}{2\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}\sin\phi = \frac{ne^2\omega^2\gamma E_0^2/m_e}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}$.
