Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015 Ν. Βλαχάκης

---

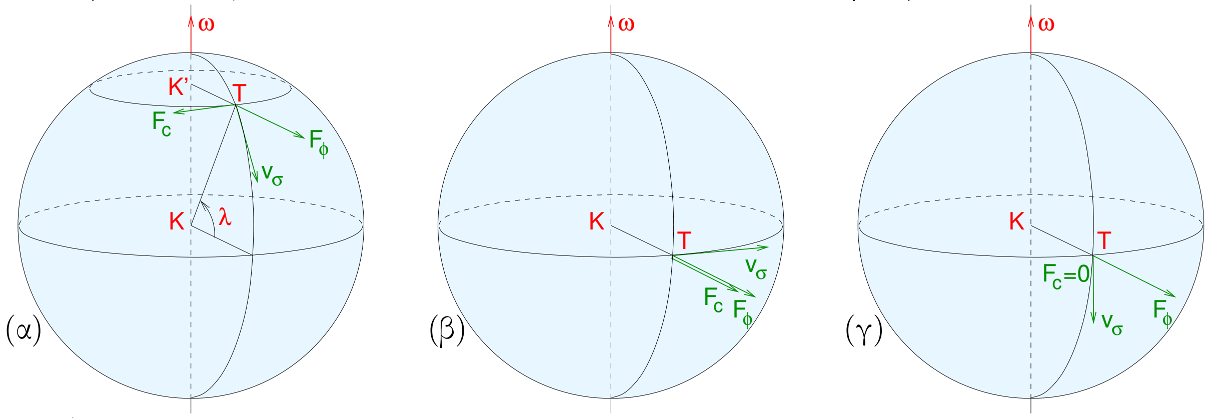
1. Ποια η φορά της φυγόκεντρου και της κοριόλειου δύναμης για ένα άνθρωπο που περπατά
(α) προς το νότο κοντά στο βόρειο πόλο;
(β) προς την ανατολή πάνω στον ισημερινό;
(γ) προς το νότο πάνω στον ισημερινό;

---

2. Σώμα μάζας m κινείται χωρίς τριβές πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο Oxz, με τον άξονα x οριζόντιο, τον z κατακόρυφο και την βαρύτητα $\vec{g} = -g\hat{z}$. Το επίπεδο περιστρέφεται με σταθερή γωνική ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oz, δηλ. $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.
(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς και λύστε τις για να βρείτε τις $x(t)$, $z(t)$ για τυχαίες αρχικές συνθήκες.
(β) Πόση ενέργεια ανά χρόνο προσφέρει στο σώμα αυτός που στρέφει το επίπεδο;
(γ) Έστω το επίπεδο είναι αβαρές και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα. Ποιες είναι τώρα οι $x(t)$, $z(t)$ και ποια η $\omega(t)$ για τυχαίες αρχικές συνθήκες;
Υπόδειξη: Τώρα κανένας (πλην της βαρύτητας) δεν δίνει ενέργεια στο σώμα.
(δ) Στην περίπτωση που η $\vec{\omega}$ είναι σταθερή, βρείτε τη θέση του σώματος σε κάθε χρόνο δουλεύοντας στο αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z$ και χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες.
(ε) Στην περίπτωση που το επίπεδο είναι αβαρές και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα βρείτε τη θέση του σώματος σε κάθε χρόνο δουλεύοντας στο αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z$ και χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες.

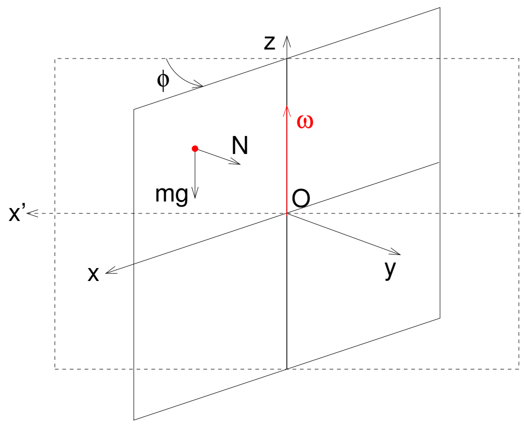
ΛΥΣΕΙΣ:

1. Για το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αρχή το Κ το οποίο περιστρέφεται με τη Γη η φυγόκεντρος είναι $\vec{F}_\phi = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m\omega^2\vec{r}_\perp = m\omega^2\,\overrightarrow{K'T}$ και η Κοριόλειος $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma$.



(α) Η $\vec{F}_\phi$ έχει τη φορά του $K'T$ και έχει συνιστώσα $F_\phi\cos\lambda$ προς τα πάνω (προς το ζενίθ του τόπου Τ) και $F_\phi\sin\lambda$ προς το νότο (πάνω στον ορίζοντα του τόπου Τ). Η Κοριόλειος $\vec{F}_c$ έχει φορά προς τη δύση. Τα μέτρα τους είναι $F_\phi = m\omega^2 R\cos\lambda$ (διότι $K'T = R\cos\lambda$) και $F_c = 2m\omega v_\sigma\sin\lambda$ (διότι η γωνία μεταξύ $\vec{v}_\sigma$ και $\vec{\omega}$ είναι $\pi-\lambda$). Για τόπο κοντά στο βόρειο πόλο είναι $\lambda\approx\pi/2$.
Αν θεωρούσαμε σύστημα με αρχή τον τόπο Τ τότε η φυγόκετρος θα ήταν μηδέν (αφού $\vec{r}=0$), αλλά θα υπήρχε η υποθετική δύναμη $-m\vec{a}_0 = m\omega^2\,\overrightarrow{K'T}$ αφού $\vec{a}_0 = -\omega^2\,\overrightarrow{K'T}$ είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου Τ το οποίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το Κ$'$.
(β) Τόσο η φυγόκετρος $\vec{F}_\phi$ όσο και η Κοριόλειος $\vec{F}_c$ έχουν φορά προς τα πάνω. Τα μέτρα τους είναι $F_\phi = m\omega^2 R$ και $F_c = 2m\omega v_\sigma$ (διότι $\vec{v}_\sigma\perp\vec{\omega}$).
(γ) Η φυγόκετρος έχει μέτρο $F_\phi = m\omega^2 R$ και φορά προς τα πάνω (ίδια με πριν), ενώ η Κοριόλειος είναι μηδέν (διότι $\vec{v}_\sigma \parallel \vec{\omega}$).

2.



(α) $\vec{a}_\sigma = -\vec{a}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{g} + \vec{N}/m$. Αντικαθιστώντας $\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$, $\vec{v}_\sigma = \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z}$, $\vec{a}_\sigma = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{z}\hat{z}$, $\vec{g} = -g\hat{z}$, $\vec{N} = N\hat{y}$ (η δύναμη αντίδρασης του επιπέδου είναι κάθετη στο επίπεδο αφού δεν υπάρχουν τριβές), $\vec{a}_0 = 0$, $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega^2\vec{r}_\perp = \omega^2 x\hat{x}$, $-2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = -2\omega\hat{z}\times(\dot{x}\hat{x}+\dot{z}\hat{z}) = -2\omega\dot{x}\hat{y}$, $-\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = 0$ βρίσκουμε

$$\begin{cases} \hat{x}: & \ddot{x} = \omega^2 x \Leftrightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad ① \\ \hat{y}: & 0 = -2\omega\dot{x} + N/m \Leftrightarrow N = 2m\omega\dot{x} \quad ② \\ \hat{z}: & \ddot{z} = -g \quad ③ \end{cases}$$

Η ③ δίνει $z = z_0 + v_{0z}t - \dfrac{1}{2}gt^2$, όπου ο δείκτης 0 αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες (για $t=0$). Η ① είναι γραμμική–ομογενής και έχει γενική λύση $x = C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t}$. Από τις αρχικές συνθήκες

βρίσκουμε τις σταθερές και έχουμε τελικά $x = \frac{\omega x_0 + v_{0x}}{2\omega} e^{\omega t} + \frac{\omega x_0 - v_{0x}}{2\omega} e^{-\omega t}$.
Η λύση γράφεται και σαν $x = x_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega} \sinh(\omega t)$.
Υπάρχουν ολοκληρώματα ενέργειας για τις δύο επιμέρους κινήσεις: $\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V_\phi = E_x$ με $V_\phi = -\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ τη δυναμική ενέργεια λόγω φυγόκεντρου και $\frac{1}{2} m\dot{z}^2 + V_g = E_z$ με $V_g = mgz$ την βαρυτική δυναμική ενέργεια (και φυσικά το άθροισμά τους για την ολική κίνηση).
(β) Η ταχύτητα ως προς αδρανειακό παρατηρητή είναι $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_0 + \vec{v}_\sigma + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Αντικαθιστώντας $\vec{v}_0 = 0$ (για παρατηρητή που βλέπει ακίνητο τον άξονα περιστροφής z) και $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{z} \times (x\hat{x} + z\hat{z}) = \omega x \hat{y}$ βρίσκουμε $\vec{v}_\alpha = \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z} + \omega x \hat{y}$ (το άθροισμα της σχετικής ταχύτητας με την ταχύτητα λόγω της περιστροφής του επιπέδου).
Αυτός που στρέφει το επίπεδο προσφέρει ενέργεια ανά χρόνο ίση με την ισχύ της δύναμης $\vec{N}$. Χρησιμοποιώντας την ② βρίσκουμε $\frac{dE}{dt} = \vec{N} \cdot \vec{v}_\alpha = 2m\omega^2 x\dot{x} = \frac{m\omega}{2} \left[(\omega x_0 + v_{0x})^2 e^{2\omega t} - (\omega x_0 - v_{0x})^2 e^{-2\omega t} \right]$.
Η ενέργεια του σώματος είναι $E = \frac{mv_\alpha^2}{2} + mgz = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 x^2\right) + mgz = E_x + E_z + m\omega^2 x^2$ και ο ρυθμός μεταβολής της $\frac{dE}{dt} = \frac{d(m\omega^2 x^2)}{dt}$ είναι πράγματι ίσος με $\vec{N} \cdot \vec{v}_\alpha = 2m\omega^2 x\dot{x}$.
(γ) Αν το επίπεδο είναι ελεύθερο να περιστρέφεται ελεύθερα και είναι αβαρές τότε δεν υπάρχει δύναμη αντίδρασης $\vec{N}$. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\vec{\omega} = \omega(t)\hat{z}$ είναι ένας από τους αγνώστους. Ο νόμος Νεύτωνα στο μη αδρανειακό, με την προσθήκη της $-\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = -\dot{\omega} x \hat{y}$, χωρίς την $\vec{N}$ δίνει

$$\begin{cases} \hat{x}: & \ddot{x} = \omega^2 x \quad ④ \\ \hat{y}: & 0 = -2\omega\dot{x} - \dot{\omega} x \quad ⑤ \\ \hat{z}: & \ddot{z} = -g \quad ⑥ \end{cases}$$

Η ⑥ δίνει όπως πριν $z = z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2$.
Όπως και πριν υπάρχει το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{1}{2} m\dot{z}^2 + mgz = E_z$ με $E_z = \frac{1}{2} m v_{0z}^2 + mgz_0$.
Η ⑤ γράφεται $2\frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{\omega}}{\omega} = 0$ και ολοκληρώνεται $2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d\omega}{\omega} = 0 \Leftrightarrow x^2\omega =$ σταθερά $= \frac{L}{m}$, όπου από τις αρχικές συνθήκες $L = m x_0^2 \omega_0$. Ισχύει δηλ. $\omega = \omega_0 x_0^2 / x^2$.
Αυτό το ολοκλήρωμα εκφράζει την διατήρηση της $\hat{z}$ συνιστώσας της στροφορμής $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}_\alpha$. Πράγματι $L = \hat{z} \cdot (\vec{r} \times m\vec{v}_\alpha) = (\hat{z} \times \vec{r}) \cdot m\vec{v}_\alpha = x\hat{y} \cdot m\vec{v}_\alpha = mx^2\omega$. Η συνιστώσα αυτή της στροφορμής διατηρείται γιατί η μόνη ροπή είναι αυτή του βάρους οπότε $\dot{L} = \hat{z} \cdot \dot{\vec{L}} = \hat{z} \cdot (\vec{r} \times m\vec{g}) = 0$.
Η ④, αφού αντικαταστήσουμε $\omega = \omega_0 \frac{x_0^2}{x^2}$ δίνει $m\ddot{x} = \frac{m\omega_0^2 x_0^4}{x^3}$. Είτε πολλαπλασιάζοντας με $\dot{x}$ και ολοκληρώνοντας, είτε θεωρώντας ότι η «δύναμη» του δεξιού μέλους προέρχεται από δυναμική ενέργεια $-\int \frac{m\omega_0^2 x_0^4}{x^3} dx = \frac{m\omega_0^2 x_0^4}{2x^2}$, καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2 x_0^4}{2x^2} = E_{xy}$, όπου $E_{xy} = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 + \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}$.
Αυτό το ολοκλήρωμα είναι συνέπεια της διατήρησης ενέργειας στο αδρανειακό σύστημα $\frac{1}{2} m v_\alpha^2 + mgz = E$. Αντικαθιστώντας $\vec{v}_\alpha = \dot{x}\hat{x} + \dot{z}\hat{z} + \omega x\hat{y}$ και αφαιρώντας το αντίστοιχο ολοκλήρωμα για την κίνηση στον άξονα z προκύπτει $E - E_z = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, το οποίο είναι ακριβώς η έκφραση του E_{xy} αφού $\omega = \omega_0 x_0^2 / x^2$.

Το ολοκλήρωμα δίνει $t = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \pm \int \frac{xdx}{\sqrt{\left(v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2\right) x^2 - \omega_0^2 x_0^4}} = \pm \frac{\sqrt{\left(v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2\right) x^2 - \omega_0^2 x_0^4}}{v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2} + C$, όπου C η σταθερά ολοκλήρωσης. Ισοδύναμα $x^2 = \frac{\omega_0^2 x_0^4}{v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2} + \left(v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2\right)(t-C)^2$. Παραγωγίζοντας προκύπτει $x\dot{x} = \left(v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2\right)(t-C)$, οπότε η σταθερά C συνδέεται με τις αρχικές συνθήκες μέσω της $C = -\frac{x_0 v_{0x}}{v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2}$. Τελικά $x = x_0 \sqrt{1 + 2\frac{v_{0x}}{x_0} t + \left(\frac{v_{0x}^2}{x_0^2} + \omega_0^2\right) t^2}$. Μια άλλη γραφή του αποτελέσματος είναι $x = x_{\min} \sqrt{1 + \left[\frac{x_0^2 \omega_0 (t-C)}{x_{\min}^2}\right]^2}$ όπου $x_{\min} = \frac{x_0}{\sqrt{1 + v_{0x}^2/\omega_0^2 x_0^2}}$.

Η γωνία ϕ μεταξύ του επιπέδου Oxz που περιστρέφεται και ενός σταθερού επιπέδου $Ox'z$ είναι $\phi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \frac{\omega_0 x_0^2 dt}{x_0^2 + 2x_0 v_{0x} t + \left(v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2\right) t^2} = \arctan \frac{\left(v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2\right) t + x_0 v_{0x}}{\omega_0 x_0^2} - \arctan \frac{v_{0x}}{\omega_0 x_0}$, θεωρώντας ότι το χρόνο $t = 0$ τα δύο επίπεδα ταυτίζονται ($\phi_0 = 0$). Ισοδύναμα $\tan\phi = \frac{x_0 \omega_0 t}{x_0 + v_{0x} t}$.

(δ) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες στο αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z$, με σταθερή $\vec{\omega}$ είναι $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi} + z\hat{z}$, $\vec{v}_\alpha = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \omega\varpi\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$ (διότι $\dot{\phi} = \omega$), $\vec{a}_\alpha = \left(\ddot{\varpi} - \omega^2\varpi\right)\hat{\varpi} + 2\omega\dot{\varpi}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$. Ο νόμος Νεύτωνα $\vec{a}_\alpha = \vec{g} + \vec{N}/m$ δίνει

$$\begin{cases} \hat{\varpi}: & \ddot{\varpi} - \omega^2\varpi = 0 \\ \hat{\phi}: & 2\omega\dot{\varpi} = N/m \\ \hat{z}: & \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ίδιες με τις ①, ②, ③ αν στη θέση του x θέσουμε τη κυλινδρική ακτίνα ϖ και έχουν ίδια λύση.

(ε) Σε αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z$ και με το επίπεδο να περιστρέφεται ελεύθερα ο νόμος Νεύτωνα είναι $\vec{a}_\alpha = \vec{g}$. Με $\vec{r} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z\hat{z}$ προκύπτουν $x' = x_0' + v_{0x}' t$, $y' = y_0' + v_{0y}' t$, $z = z_0 + v_{0z} t - \frac{gt^2}{2}$.

Αυτή η λύση πρέπει να είναι ίδια με την λύση του ερωτήματος (γ). Πράγματι αν επιλέξουμε $y_0' = 0$ κάτι που δεν βλάπτει την γενικότητα (απλά επιλέγουμε το επίπεδο $Ox'z$ του αδρανειακού να ταυτίζεται με την αρχική θέση του περιστρεφόμενου επιπέδου) οι λύσεις ταυτίζονται αντιστοιχίζοντας $x_0' \leftrightarrow x_0$, $v_{0x}' \leftrightarrow v_{0x}$, $v_{0y}' \leftrightarrow \omega_0 x_0$ και $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \varpi \leftrightarrow |x|$, $x'/\varpi \leftrightarrow \cos\phi$. $y'/\varpi \leftrightarrow \sin\phi$.

Στην ουσία η λύση του ερωτήματος (γ) μας δίνει τη μορφή που έχει η εξίσωση της ευθείας στις πολικές συντεταγμένες στο επιπεδο $Ox'y'$. Οι $x' = x_0 + v_{0x} t$, $y' = \omega_0 x_0 t$ που αποτελούν εξίσωση ευθείας στο επιπεδο $Ox'y'$ αντιστοιχούν σε κυλινδρική ακτίνα $\varpi = \sqrt{x_0^2 + 2x_0 v_{0x} t + \left(v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2\right) t^2}$ και ϕ κοινή λύση των $\tan\phi = \frac{\omega_0 x_0 t}{x_0 + v_{0x} t}$ και $\sin\phi = \frac{\omega_0 x_0 t}{\varpi}$. Ισοδύναμα $\varpi = \varpi_{\min} \sqrt{1 + \left[\frac{\omega_0 (t-C)}{\cos^2\phi_C}\right]^2}$ και $\phi = \arctan \frac{\omega_0 (t-C)}{\cos^2\phi_C} + \phi_C$ όπου $\varpi_{\min} = |x_0 \cos\phi_C|$, $C = \frac{\sin\phi_C \cos\phi_C}{\omega_0}$ και η γωνία ϕ_C καθορίζεται από τις $\sin\phi_C = -\frac{v_{0x}}{\sqrt{v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2}}$, $\cos\phi_C = \frac{\omega_0 x_0}{\sqrt{v_{0x}^2 + \omega_0^2 x_0^2}}$.