

Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ν. Βλαχάκης

1. Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στο πεδίο δύναμης της πρώτης άσκησης της τέταρτης εργασίας με $\lambda = 2$, αλλά επιπλέον είναι υποχρεωμένο να κινείται μόνο στην ευθεία $x = 0$, $y = 1$, οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων είναι $\vec{F} = \frac{2z^2 - 1}{(1 + z^2)^{5/2}} \hat{z}$.

(α) Δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια είναι $V = \frac{z}{(1 + z^2)^{3/2}}$ και σχεδιάστε το γράφημά της.

(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας, ευσταθή και ασταθή.

(γ) Ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας;

(δ) Αν το σώμα ξεκινά από το $z = 0$ διερευνήστε που καταλήγει ανάλογα με την τιμή της αρχικής ταχύτητας v_0 .

(ε) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης.

2. Σώμα μάζας m και φορτίου q κινείται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{\phi}$, όπου B σταθερά και (ϖ, ϕ, z) οι κυλινδρικές συντεταγμένες.

(α) Δείξτε ότι οι $\hat{\phi}$ και $\hat{z}$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$, με $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{d}{dt}(\varpi^2\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$, δίνουν τα ολοκληρώματα $m\varpi^2\dot{\phi} = L$ και $m\dot{z} - qB\varpi = p_z$.

(β) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα αυτά γράψτε την $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα σαν $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ (η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη»). Γράψτε το ολοκλήρωμα της ενέργειας για αυτή την κίνηση $\frac{m\dot{\varpi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\varpi) = E$, όπου $V_{\text{eff}}(\varpi)$ η ενεργός δυναμική ενέργεια.

(γ) Μελετήστε την συνάρτηση $V_{\text{eff}}(\varpi)$ και βρείτε γραφικά τα όρια της ακτινικής κίνησης (δηλ. τα $\varpi_{\min}$ και $\varpi_{\max}$) για τυχούσες αρχικές συνθήκες.

3. Έστω σώμα μάζας $m = 1$ κινείται στο πεδίο δύναμης της δεύτερης άσκησης της τέταρτης εργασίας $\vec{F} = \frac{2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}}{r^3}$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν ολοκληρώματα ενέργειας και στροφορμής

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + \frac{\cos\theta}{r^2} = E, \quad r^2\sin^2\theta\dot{\phi} = L.$$

(β) Ένα τρίτο ολοκλήρωμα που προκύπτει από την $\hat{\theta}$ συνιστώσα της εξίσωσης ορμής είναι το

$$(r^2\dot{\theta})^2 + \frac{L^2}{\sin^2\theta} + 2\cos\theta = \beta.$$

Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα δείξτε ότι η κίνηση του σώματος ανάγεται σε δυο «μονοδιάστατα» προβλήματα

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_r(r) = E \text{ με } V_r(r) = \frac{\beta}{2r^2} \quad \text{και} \quad r^4\dot{\theta}^2 + V_\theta(\theta) = \beta \text{ με } V_\theta(\theta) = \frac{L^2}{\sin^2\theta} + 2\cos\theta,$$

τα οποία μας επιτρέπουν να βρούμε τα όρια των r και θ για διάφορες τιμές των E , β και L , από τις γραφικές παραστάσεις των $V_r(r)$ και $V_\theta(\theta)$.

(γ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $\vec{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{z}$ (οπότε $r = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\phi = 0$) και

έχει ταχύτητα $\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\phi}$ (οπότε $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = 1$). Βρείτε τα όρια των r και θ και περιγράψτε την κίνηση του σώματος. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα στην αρχή των αξόνων;

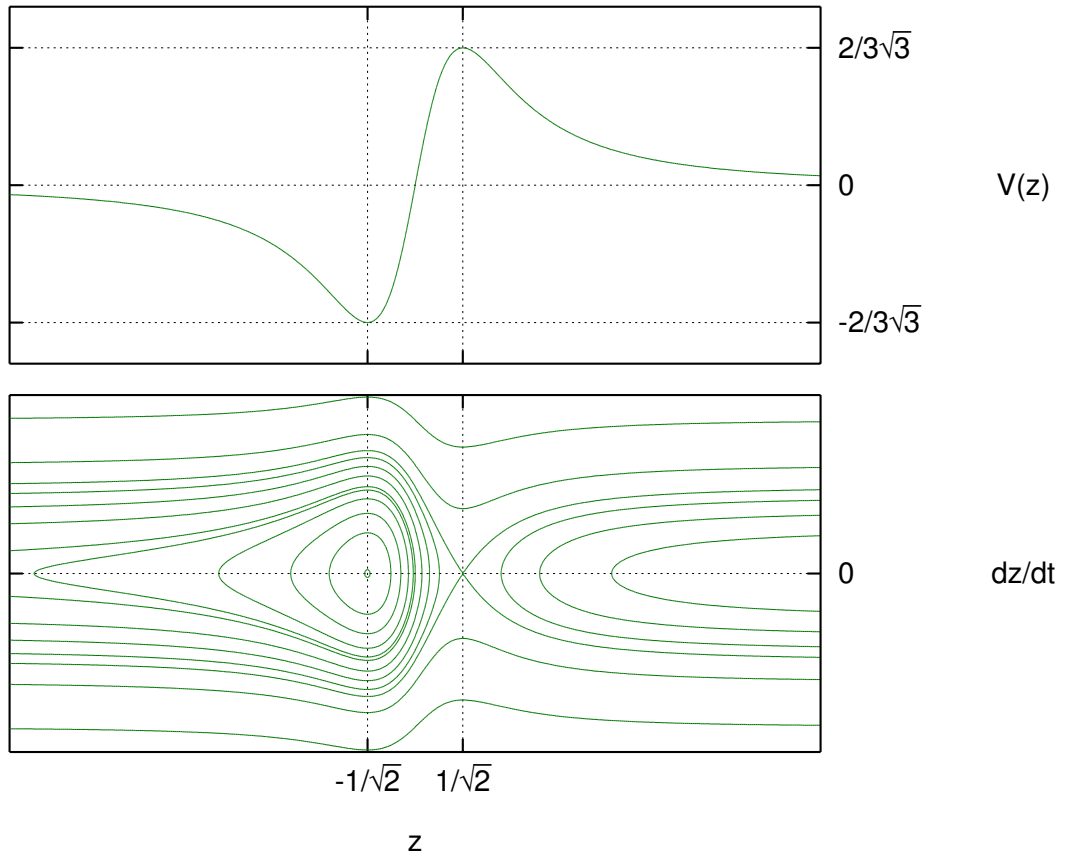
ΛΥΣΕΙΣ:

1. (α) Ισχύει $-\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dz}\hat{z} = \frac{2z^2 - 1}{(1+z^2)^{5/2}}\hat{z} = \vec{F}$.

Η δυναμική ενέργεια υπολογίζεται από $V = -\int Fdz = \int \frac{-2z^2 + 1}{(1+z^2)^{5/2}}dz$ με την αντικατάσταση $z = \cot \theta$, όπου $\theta \in (0, \pi)$. Προκύπτει $V = \sin^2 \theta \cos \theta + \text{σταθερά} = \frac{z}{(1+z^2)^{3/2}}$, αφού $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ και $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ (έχουμε μηδενίσει την αυθαίρετη προσθετική σταθερά).

$$V' = -\frac{2}{(1+z^2)^{5/2}} \left(z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V'' = \frac{6}{(1+z^2)^{7/2}} z \left(z + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \left(z - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

z	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
V'	-	-	0	+	+	0	-
V''	-	0	+	+	0	-	+
V	0		$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$		0



(β) Σημεία ισορροπίας (ακρότατα της V ή ισοδύναμα μηδενισμοί της F) είναι τα $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Το $z = -1/\sqrt{2}$ είναι ευσταθές (αφού το V ελάχιστο) και το $z = 1/\sqrt{2}$ είναι ασταθές (αφού το V μέγιστο).

(γ) Γύρω από το ευσταθές, με $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + q$ είναι $V \approx V(-1/\sqrt{2}) + V'(-1/\sqrt{2})q + V''(-1/\sqrt{2})q^2/2 =$

$-\frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{3^{5/2}}q^2$ και $\frac{m\dot{z}^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2}$. Άρα το ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι $\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{8}{3^{5/2}}q^2 = E + \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Παραγωγίζοντάς το βρίσκουμε $\ddot{q} + \frac{16}{3^{5/2}}q = 0$, δηλ. εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με $\omega = \frac{4}{3^{5/4}}$ και περίοδο $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{3^{5/4}\pi}{2}$.

Ισοδύναμα μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor το νόμο Νεύτωνα $m\ddot{z} = F(z)$. Με $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + q$ είναι $F \approx F(-1/\sqrt{2}) + F'(-1/\sqrt{2})q = 0 - V''(-1/\sqrt{2})q = -\frac{16}{3^{5/2}}q$ οπότε βρίσκουμε $\ddot{q} + \frac{16}{3^{5/2}}q = 0$.

$$(\delta) E = \frac{mv_0^2}{2} + V(0) = \frac{v_0^2}{2} \geq 0.$$

Αν $v_0 \leq 0$ κινείται προς μικρότερα z και καταλήγει στο $z = -\infty$.

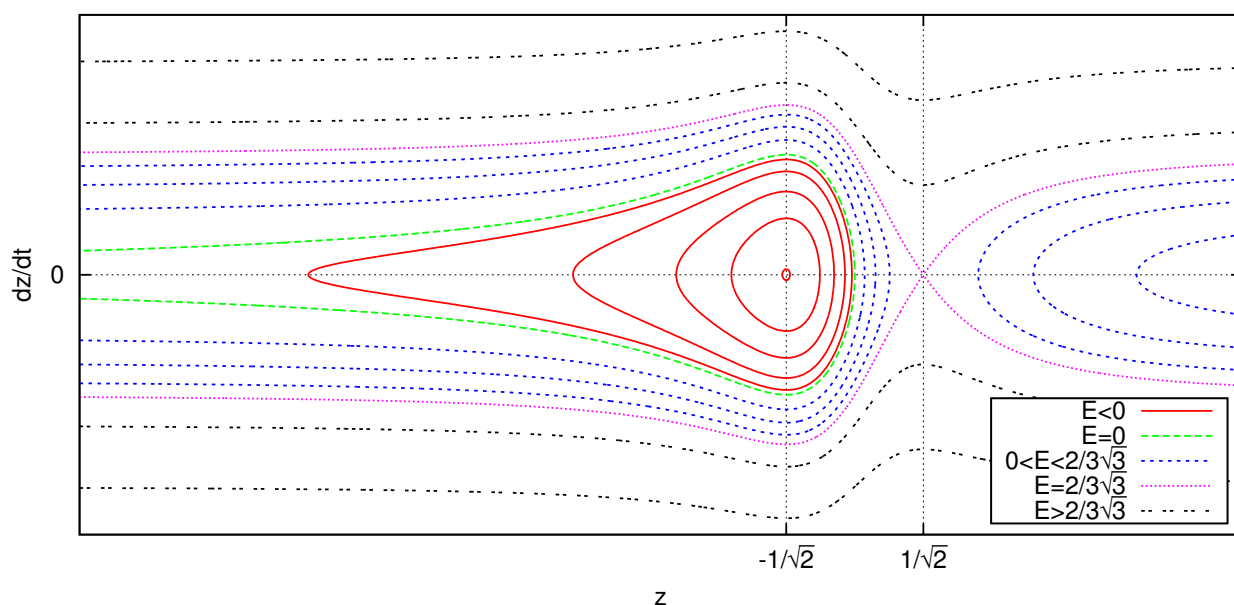
Αν $v_0 > 0$ αρχικά κινείται προς μεγαλύτερα z και ανάλογα με την τιμή της ενέργειας έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Αν $E < \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 < v_0 < \frac{2}{3^{3/4}}$ θα ανακλαστεί στο σημείο όπου $V(z) = E$ και στη συνέχεια θα κινείται προς μικρότερα z μέχρι το $-\infty$.

Αν $E = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow v_0 = \frac{2}{3^{3/4}}$ κινείται επί άπειρον προς το ασταθές σημείο ισορροπίας $z = 1/\sqrt{2}$.

Αν $E > \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow v_0 > \frac{2}{3^{3/4}}$ κινείται διαρκώς προς μεγαλύτερα z μέχρι το $+\infty$.

(ε) Το διάγραμμα φάσης έχει σχεδιαστεί κάτω από το γράφημα της V . Παρακάτω φαίνονται οι διάφορες ενέργειες, με κόκκινο οι $E < 0$ (περατωμένη κίνηση), με πράσινο η $E = 0$ (με $\dot{z} \rightarrow 0$ για $z \rightarrow -\infty$), με μπλε οι $0 < E < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, με μωβ οι $E = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ και με μαύρο οι $E > \frac{2}{3\sqrt{3}}$.



$$2. (\alpha) m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} \Leftrightarrow m(\ddot{\omega} - \omega\dot{\phi}^2)\hat{\omega} + m\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}(\omega^2\dot{\phi})\hat{\phi} + m\ddot{z}\hat{z} = q \begin{vmatrix} \hat{\omega} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \dot{\omega} & \omega\dot{\phi} & \dot{z} \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m(\ddot{\omega} - \omega \dot{\phi}^2) = -qB\dot{z} & \textcircled{1} \\ \frac{d}{dt}(m\omega^2\dot{\phi}) = 0 & \textcircled{2} \\ m\ddot{z} = qB\dot{\omega} & \textcircled{3} \end{cases}$$

Η $\textcircled{2}$ δίνει το ολοκλήρωμα $m\omega^2\dot{\phi} = L$.

L είναι η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ η οποία είναι αναμενόμενο ότι διατηρείται αφού δεν υπάρχει δύναμη στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση.

Η $\textcircled{3}$ ολοκληρώνεται επίσης αφού και τα δύο μέλη γράφονται σαν χρονικές παράγωγοι $\frac{d(m\dot{z})}{dt} = \frac{d(qB\omega)}{dt}$. Έτσι προκύπτει $m\dot{z} - qB\omega = p_z$.

Αυτή είναι η $\hat{z}$ συνιστώσα της «κανονικής» ορμής, $mv_z + qA_z$, με $\vec{A}$ το διανυσματικό δυναμικό του μαγνητικού πεδίου. Για το πεδίο του προβλήματος είναι $B\hat{\phi} = \vec{\nabla} \times (-B\omega\hat{z})$ και άρα $\vec{A} = -B\omega\hat{z}$.

(β) Αντικαθιστώντας στην $\textcircled{1}$ τις σχέσεις $\dot{\phi} = \frac{L}{m\omega^2}$ και $\dot{z} = \frac{p_z}{m} + \frac{qB}{m}\omega$ βρίσκουμε $m\ddot{\omega} = f(\omega)$

$$\text{με } f(\omega) = \frac{L^2}{m\omega^3} - \frac{qBp_z}{m} - \frac{q^2B^2}{m}\omega.$$

Το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται $\frac{1}{2}m\dot{\omega}^2 + V_{\text{eff}}(\omega) = E$, με $V_{\text{eff}}(\omega) = -\int f(\omega)d\omega =$

$$\int \left(-\frac{L^2}{m\omega^3} + \frac{qBp_z}{m} + \frac{q^2B^2}{m}\omega \right) d\omega = \frac{L^2}{2m\omega^2} + \frac{qBp_z}{m}\omega + \frac{q^2B^2}{2m}\omega^2 + C,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης.

(Ισοδύναμα μπορούμε να βρούμε το ολοκλήρωμα πολλαπλασιάζοντας την $m\ddot{\omega} = f(\omega)$ με $\dot{\omega}$.)

Το ολοκλήρωμα εκφράζει την πραγματική ενέργεια του φορτίου, δηλ. την κινητική του ενέργεια (το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο και γι' αυτό δεν υπάρχει αντίστοιχη δυναμική ενέργεια).

$$\text{Πράγματι, } \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\omega}^2 + \omega^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\dot{\omega}^2 + \frac{L^2}{2m\omega^2} + \frac{1}{2m}(p_z + qB\omega)^2 = E - C + \frac{p_z^2}{2m} =$$

σταθερά (αν επιλέξουμε $C = \frac{p_z^2}{2m}$ προκύπτει ακριβώς $\frac{1}{2}mv^2 = E$).

(γ) Για $\omega \rightarrow \infty$ η $V_{\text{eff}}(\omega) \rightarrow +\infty$ (κυριαρχεί ο όρος με το ω^2 ο οποίος έχει θετικό συντελεστή). Οπότε σκεπτόμενοι τα όρια κίνησης στο διάγραμμα της $V_{\text{eff}}(\omega)$, όποιες και αν είναι οι αρχικές συνθήκες υπάρχει άνω όριο στην ακτίνα ω (με ω_{max} την μεγαλύτερη λύση της $V_{\text{eff}}(\omega) = E$).

Αλλιώς: Η «δύναμη» $f(\omega)$ σε μεγάλα ω είναι $f(\omega) \approx -\frac{q^2B^2}{m}\omega$, δηλ. είναι αρνητική (ελκτική)

και το έργο της $\int^\omega f(\omega)d\omega$ γίνεται $-\infty$ για $\omega \rightarrow \infty$. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα αφήσει το σώμα να φτάσει σε άπειρη απόσταση ω , όσο μεγάλη και αν είναι η αρχική του κινητική ενέργεια.

Όμοια φαίνεται ότι για $\omega \rightarrow 0^+$ η $V_{\text{eff}}(\omega) \rightarrow +\infty$ (κυριαρχεί ο όρος της στροφορμής) οπότε υπάρχει και κάτω όριο της ακτίνας ω . Είναι δηλ. $\omega_{\text{min}} \leq \omega \leq \omega_{\text{max}}$ και η κίνηση του φορτίου στην ακτινική κατεύθυνση είναι ταλάντωση.

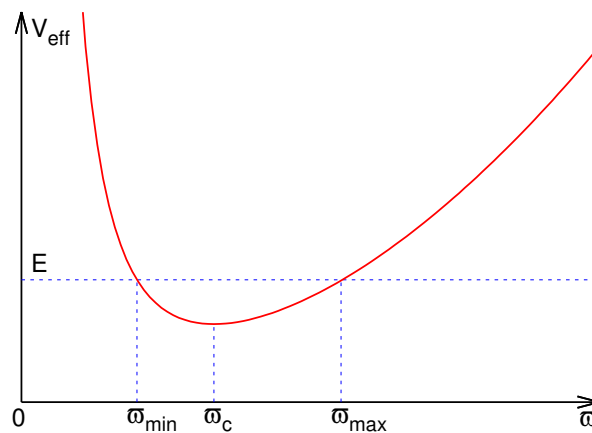
Στην τετριμμένη περίπτωση μηδενικής στροφορμής $L = 0$ δεν ισχύει $V_{\text{eff}}(\omega) \rightarrow +\infty$ για $\omega \rightarrow 0^+$.

Όταν όμως είναι $L = 0$ η κίνηση γίνεται σε ένα επίπεδο $\phi = \text{σταθερό}$ με το μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο και με ίδια τιμή σε κάθε σημείο, οπότε προκύπτει η κλασική κυκλική κίνηση Larmor.

(Αν το φορτίο περνά τον άξονα z η φορά του $\vec{B}$ αντιστρέφεται, όμως πάλι η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί τμηματικά κυκλική κίνηση Larmor.)

Παρότι η παρατήρηση ότι η $V_{\text{eff}}(\varpi)$ απειρίζεται για $\varpi \rightarrow \infty$ και $\varpi \rightarrow 0^+$ είναι αρκετή για να καταλάβουμε ότι υπάρχουν μέγιστες και ελάχιστες τιμές της κυλινδρικής ακτίνας, είναι εφικτή λεπτομερέστερη μελέτη της $V_{\text{eff}}(\varpi)$.

Είναι $V_{\text{eff}}''(\varpi) = \frac{3L^2}{m\varpi^4} + \frac{q^2 B^2}{m} > 0$ οπότε η $V_{\text{eff}}'(\varpi) = -\frac{L^2}{m\varpi^3} + \frac{q^2 B^2}{m}\varpi$ είναι αύξουσα, μεταβαλλόμενη από $-\infty$ για $\varpi \rightarrow 0^+$ σε $+\infty$ για $\varpi \rightarrow \infty$. Άρα μηδενίζεται σε ένα μόνο σημείο ϖ_c . Για $\varpi < \varpi_c$ είναι $V_{\text{eff}}' < 0$ και άρα η V_{eff} είναι φθίνουσα (ξεκινά από το $+\infty$ για $\varpi \rightarrow 0^+$), ενώ για $\varpi > \varpi_c$ είναι $V_{\text{eff}}' > 0$ και άρα η V_{eff} είναι αύξουσα (καταλήγει στο $+\infty$ για $\varpi \rightarrow +\infty$). Η V_{eff} έχει ελάχιστο στο ϖ_c και η εξίσωση $V_{\text{eff}}(\varpi) = E$ έχει δύο λύσεις, τις $\varpi_{\min}$ και $\varpi_{\max}$. Οι λύσεις αυτές γίνονται μια διπλή αν η ενέργεια είναι η ελάχιστη τιμή του $V_{\text{eff}}(\varpi)$ (οπότε $\varpi_{\min} = \varpi_{\max} = \varpi_c$ και η τροχιά γίνεται πάνω στον κύλινδρο $\varpi = \varpi_c$).



3. (α) Για να υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας πρέπει η $\vec{F}$ να είναι συντηρητική. Πρέπει δηλ. να υπάρχει V τέτοια ώστε $\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \frac{2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}}{r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$, άρα πρέπει να ισχύουν $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2 \cos \theta}{r^3}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta}{r^2}$ και $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$. Η τρίτη σημαίνει ότι $V = V(r, \theta)$.

Ολοκληρώνοντας την πρώτη έχουμε $V = \frac{\cos \theta}{r^2} + f(\theta)$. Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι $df/d\theta = 0$, επομένως η f είναι αυθαίρετη προσθετική σταθερά. Οπότε η δύναμη είναι πράγματι συντηρητική με την δυναμική ενέργεια (αγνοώντας την προσθετική σταθερά κάτι που δεν βλάπτει την γενικότητα) $V = \frac{\cos \theta}{r^2}$.

Η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}$ οπότε το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{1}{2} m v^2 + V = E$, ή $\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{\cos \theta}{r^2} = E$.

Αφού δεν υπάρχει δύναμη στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση η $\hat{z}$ συνιστώσα της στροφορμής $\hat{z} \cdot (\vec{r} \times m \vec{v}) = (\hat{z} \times \vec{r}) \cdot m \vec{v} = r \sin \theta \hat{\phi} \cdot m \vec{v} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L$ διατηρείται. (Είναι $\dot{L} = \hat{z} \cdot \dot{\vec{L}} = \hat{z} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = (\hat{z} \times \vec{r}) \cdot \vec{F} = r \sin \theta \hat{\phi} \cdot \vec{F} = 0$.)

Ισοδύναμα, η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της επιτάχυνσης σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται $a_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$, οπότε ο μηδενισμός της από το νόμο Νεύτωνα αν $F_\phi = 0$ δίνει κατευθείαν $r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{σταθερά} = L/m$.

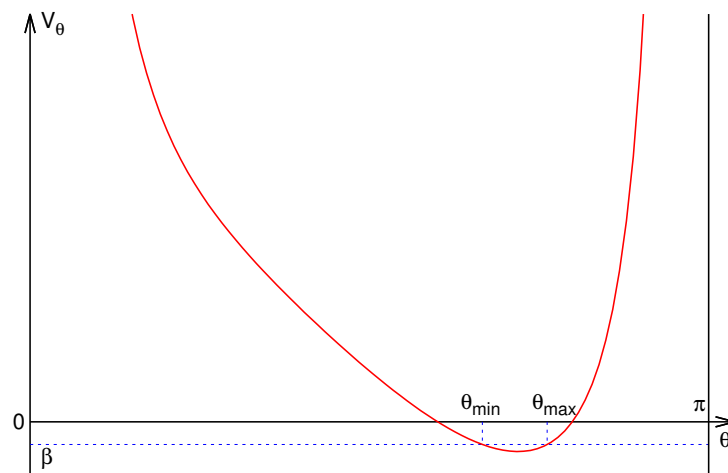
(β) Η έκφραση του ολοκληρώματος β γράφεται $r^4 \dot{\theta}^2 + V_\theta(\theta) = \beta$ με $V_\theta(\theta) = \frac{L^2}{\sin^2 \theta} + 2 \cos \theta$.

Απαλείφοντας τα $\dot{\theta}$ και $\dot{\phi}$ στο ολοκλήρωμα ενέργειας, μέσω των $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2 \sin^2 \theta}$ και $\dot{\theta}^2 = \frac{\beta - V_\theta(\theta)}{r^4}$ καταλήγουμε στην $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_r(r) = E$ με $V_r(r) = \frac{\beta}{2r^2}$.

(γ) Από τις αρχικές συνθήκες, με $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, είναι $L = \frac{3}{4}$, $\beta = -\frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{8}$.

Τα όρια του θ θα βρεθούν από την $V_\theta(\theta) \leq \beta$, όπου $V_\theta(\theta) = \frac{9}{16 \sin^2 \theta} + 2 \cos \theta$ και $\beta = -\frac{1}{4}$.

Είναι $V'_\theta = -\frac{9 \cos \theta}{8 \sin^3 \theta} - 2 \sin \theta > 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{16} \cos \theta > \sin^4 \theta$. Σχεδιάζοντας τα δύο μέλη στο διάστημα $(0, \pi)$ συμπεραίνουμε ότι $V'_\theta > 0$ για $\theta > \theta_c$, όπου $\theta_c \in (\pi/2, \pi)$ η ρίζα της $-\frac{9}{16} \cos \theta_c = \sin^4 \theta_c$. Άρα η V_θ απειρίζεται στα $\theta = 0^+$ και π^- και έχει ένα ελάχιστο στο θ_c .

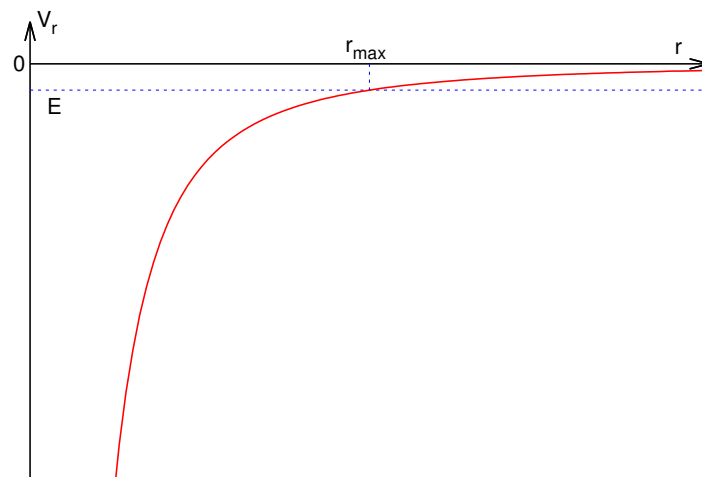


Οι λύσεις της $V_\theta = \beta$ είναι $\theta_{\min} = 2\pi/3 = 2.094$ και $\theta_{\max} = \arccos \frac{3 - \sqrt{217}}{16} = 2.394$ rad.

Μπορούν να βρεθούν είτε αριθμητικά, είτε αναλυτικά παραγοντοποιώντας το $\frac{9}{16 \sin^2 \theta} + 2 \cos \theta + \frac{1}{4} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} (2 \cos \theta + 1) (\cos \theta - \frac{3 - \sqrt{217}}{16}) (\cos \theta - \frac{3 + \sqrt{217}}{16})$.

Με την πάροδο του χρόνου το σώμα μπορεί να κινείται μεταξύ αυτών των δύο κώνων.

Τα όρια του r θα βρεθούν από την $V_r(r) \leq E$, όπου $V_r(r) = -\frac{1}{8r^2}$ και $E = -\frac{1}{8}$.



Προκύπτει ότι το σώμα κινείται συνεχώς προς το κέντρο με ταχύτητα στην ακτινική κατεύθυνση (αρνητική) $\dot{r} = -\sqrt{2(E - V_r)}$. Καταλήγει στο κέντρο μετά από χρόνο $t_c = \int_1^0 \frac{dr}{\dot{r}} = \int_0^1 \frac{2rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \left[-2\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 = 2$.

Όμοια μπορούμε να βρούμε την ακτίνα σε κάθε χρόνο, $t = \int_1^r \frac{dr}{\dot{r}} = \int_r^1 \frac{2rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \left[-2\sqrt{1-r^2}\right]_r^1 = 2\sqrt{1-r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{1-t^2/4}$, ενώ $\theta(t)$ και $\phi(t)$ είναι λύσεις των $(4-t^2)^2 \dot{\theta}^2 = -\frac{9}{\sin^2 \theta} - 32 \cos \theta - 4$ και $\dot{\phi} = \frac{3}{(4-t^2) \sin^2 \theta}$.

Με την πάροδο του χρόνου η απόσταση του σώματος από το κέντρο διαρκώς μειώνεται. Η κίνηση γίνεται μεταξύ των δύο κώνων $\theta = \theta_{\min}$ και $\theta = \theta_{\max}$, ενώ ταυτόχρονα το σώμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z .

