

Μηχανική Ι – Εργασία #1

Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ν. Βλαχάκης

1. Ποιος συνδυασμός των σταθερών G , \hbar , c έχει μονάδες επιτάχυνσης;

2. Δείξτε ότι η συνιστώσα του \vec{a} κάθετα στο \vec{b} είναι $\frac{\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{b^2}$.

3. Η μέγιστη επιτάχυνση ενός αυτοκινήτου είναι k και η μέγιστη επιβράδυνσή του είναι λ . Δείξτε ότι δεν μπορεί να διανύσει απόσταση ℓ από ακινησία σε ακινησία σε συντομότερο χρονικό διάστημα από $\sqrt{2\ell \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\lambda} \right)}$.

4. Έστω περιγράψουμε την κίνηση σώματος χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) .

(α) Γράψτε τα (x, y, z) συναρτήσει των (r, θ, ϕ) και αντίστροφα.

(β) Γράψτε το \vec{r} συναρτήσει των (r, θ, ϕ) και των καρτεσιανών μοναδιαίων $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

Βρείτε τις παραγώγους $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ καθώς και τα μοναδιαία \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$. (Είναι $\hat{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|$ και όμοια για τα άλλα δύο μοναδιαία.)

Σχεδιάστε τα μοναδιαία σε ένα σύστημα συντεταγμένων και επαληθεύστε ότι αποτελούν τοπικό ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα (με $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$).

(γ) Δείξτε ότι η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi$ γράφεται $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$. Σχεδιάστε σε ένα σύστημα συντεταγμένων την μεταβολή $dr \hat{r}$ που αντιστοιχεί σε μεταβολή του r κατά dr , κρατώντας σταθερά τα θ και ϕ . Όμοια για τα άλλα δύο μέρη του $d\vec{r}$.

(δ) Χρησιμοποιώντας τη σχέση πληρότητας βρείτε τα $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ συναρτήσει των (r, θ, ϕ) και των μοναδιαίων $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$.

(ε) Η θέση στις σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται $\vec{r} = r\hat{r}$. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο βρείτε την έκφραση της ταχύτητας \vec{v} . Πως το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και από την έκφραση του $d\vec{r}$ (ερώτημα γ);

(στ) Παραγωγίζοντας την \vec{v} βρείτε την έκφραση της επιτάχυνσης $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) \hat{\phi}$.

(ζ) Χρησιμοποιώντας την έκφραση της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$ γράψτε

(ζ₁) την έκφραση του στοιχειώδους μήκους καμπύλης,

(ζ₂) την έκφραση στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στην σφαιρική επιφάνεια $r = \text{σταθερό}$,

(ζ₃) την έκφραση στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στην κωνική επιφάνεια $\theta = \text{σταθερό}$,

(ζ₄) την έκφραση στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στην επίπεδη επιφάνεια $\phi = \text{σταθερό}$,

(ζ₅) την έκφραση του στοιχειώδους όγκου.

