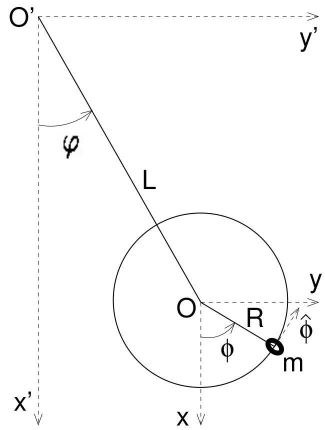
Μηχανική Ι – Εργασία #7

Χειμερινό εξάμηνο 2013-2014 Ν. Βλαχάκης

1. Μια κυκλική κατακόρυφη στεφάνη ακτίνας R κινείται σαν εκκρεμές σε κατακόρυφο επίπεδο, όπως στο σχήμα. Το κέντρο της στεφάνης O απέχει σταθερή απόσταση L από το σταθερό σημείο O' και η γωνία φ είναι μια γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Δαχτυλίδι μάζας m είναι περασμένο στη στεφάνη και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές.



(α) Βρείτε την ταχύτητα $\vec{v}_0$ (ως προς το O') και επιτάχυνση $\vec{a}_0$ του σημείου O και δείξτε ότι στις πολικές συντεταγμένες στο σύστημα Oxy ισχύει $\vec{v}_0 \cdot \hat{\phi} = L\dot{\varphi}\cos(\phi - \varphi)$ και $\vec{a}_0 \cdot \hat{\phi} = L\ddot{\varphi}\cos(\phi - \varphi) + L\dot{\varphi}^2 \sin(\phi - \varphi)$.
Υπόδειξη: Παραγωγίστε την $\overrightarrow{O'O} = L\cos\varphi\,\hat{x} + L\sin\varphi\,\hat{y}$.
(β) Ποια η εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού (η διαφορική εξίσωση που καθορίζει την γωνία ϕ);
(γ) Έστω ότι τόσο η στεφάνη όσο και το δαχτυλίδι εκτελούν μικρές κινήσεις γύρω από την κατακόρυφο, δηλ. $|\varphi| \ll 1$ και $|\phi| \ll 1$. Δείξτε ότι η εξίσωση γίνεται $R\ddot{\phi} = -g\phi - L\ddot{\varphi}$.
(δ) Έστω αρχικά η στεφάνη και το δαχτυλίδι είναι ακίνητα στην κατώτερη θέση ($\varphi = \phi = 0$). Κάποια στιγμή μετακινούμε τη στεφάνη μέχρι τη γωνία φ_0, ώστε η γωνία φ να είναι σε κάθε χρόνο $\varphi = \varphi_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, με $|\varphi_0| \ll R/L$. Επιλύστε την εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι

$$\phi = \frac{L\varphi_0}{R + g\tau^2}\left[e^{-t/\tau} - \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right) - \sqrt{\frac{g\tau^2}{R}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)\right].$$

Τι κίνηση εκτελεί το δαχτυλίδι σε «μεγάλους» χρόνους;
Δίνονται: $\cos(a - b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b\,,\ \sin(a - b) = \sin a\,\cos b - \sin b\,\cos a\,,$

$$\vec{v}_\sigma = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_0\,,\ \vec{a}_\sigma = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0\,,\ \vec{a}_\sigma = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi})\hat{\phi}\,.$$

---

2. Αυτοκίνητο παίρνει μια αριστερή στροφή σε οριζόντιο δρόμο με ακτίνα καμπυλότητας R. Το αυτοκίνητο κινείται με γωνιακή ταχύτητα ω (τρέχει με ταχύτητα ωR). Από το δάπεδο του αυτοκινήτου πετάμε προς τα πάνω σώμα με ταχύτητα v_0. Πόσο δεξιά και πόσο πίσω από το σημείο εκκίνησης θα επιστρέψει στο δάπεδο;
Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. Θεωρήστε επίσης ότι η ακτίνα καμπυλότητας του δρόμου δεν αλλάζει όσο κινείται το σώμα.
Απλοποιήστε το αποτέλεσμα αν η γωνία που διαγράφει το αυτοκίνητο όσο κινείται το σώμα είναι μικρή, δηλ. $\omega t \ll 1$ (ισοδύναμα $2v_0\omega/g \ll 1$).
Λύστε το πρόβλημα με βάση την $\vec{a}_\sigma = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$.
Δίνεται ότι η λύση του συστήματος $\left\{\begin{array}{l} \ddot{\xi} = 2\omega\dot{\eta} + \omega^2\xi + A \\ \ddot{\eta} = -2\omega\dot{\xi} + \omega^2\eta + B \end{array}\right\}$ (όπου ω, A, B σταθερές) είναι $\left\{\begin{array}{l} \xi = (C_1 + C_2 t)\cos(\omega t) + (C_3 + C_4 t)\sin(\omega t) - A/\omega^2 \\ \eta = (C_3 + C_4 t)\cos(\omega t) - (C_1 + C_2 t)\sin(\omega t) - B/\omega^2 \end{array}\right\}$ με C_1, C_2, C_3, C_4 σταθερές ολοκλήρωσης που σχετίζονται με τις αρχικές συνθήκες μέσω των $C_1 = \xi_0 + A/\omega^2$, $C_2 = \dot{\xi}_0 - \omega\eta_0 - B/\omega$, $C_3 = \eta_0 + B/\omega^2$, $C_4 = \dot{\eta}_0 + \omega\xi_0 + A/\omega$.
Δίνονται επίσης τα αναπτύγματα (για μικρά ϵ): $\sin\epsilon = \epsilon - \dfrac{\epsilon^3}{6} + \mathcal{O}(\epsilon^5)$, $\cos\epsilon = 1 - \dfrac{\epsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$.
