Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2013-2014 Ν. Βλαχάκης

---

1. Σε μια γραμμική εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση σώματος μάζας $m=1$, με εξίσωση κίνησης $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=f(t)$, η θέση σε κάθε χρόνο είναι $x=e^{-t}\cos t+\dfrac{1}{2}\sin(2t)-\cos(2t)$.
(α) Ποια τα γ, ω_0 και η $f(t)$;
(β) Μετά από πόσο χρόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση; Πόση είναι τότε η ενέργεια που δίνει ο διεγέρτης σε μια περίοδο; Επαληθεύστε ότι τόση είναι και η ενέργεια που γίνεται θερμότητα μέσω της δύναμης απόσβεσης.

---

2. Σε μια γραμμική εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=3\sin(2t)+4\cos(2t)$ ποια η θέση σε κάθε χρόνο αν αρχικά (για $t=0$) το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην αρχή του άξονα;

---

3. Σώμα μάζας m και φορτίου q κινείται μέσα σε ομογενή μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδία, τα οποία σε κατάλληλες μονάδες γράφονται $\vec{B}=\dfrac{m}{q}\hat{z}$ και $\vec{E}=-\dfrac{mu_0}{q}\hat{x}+\dfrac{ma_0}{q}\hat{z}$ με u_0, a_0 σταθερά.
(α) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις κίνησης για να βρείτε τις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ για τυχαίες αρχικές συνθήκες $\vec{r}|_{t=0}=x_0\hat{x}+y_0\hat{y}+z_0\hat{z}$, $\vec{v}|_{t=0}=v_{x0}\hat{x}+v_{y0}\hat{y}+v_{z0}\hat{z}$.
(β) Ποια είναι τα $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ σε σύστημα που κινείται με ταχύτητα $u_0\hat{y}+(v_{z0}+a_0t)\hat{z}$;
(Στο σύστημα αυτό $\vec{v}'=\vec{v}-u_0\hat{y}-(v_{z0}+a_0t)\hat{z}$, $\vec{r}'=\vec{r}-u_0t\hat{y}-\left(v_{z0}t+\dfrac{a_0}{2}t^2\right)\hat{z}$.)
(γ) Δείξτε ότι αν θέσουμε $v_{x0}=R\cos t_0$, $v_{y0}=u_0+R\sin t_0$ προκύπτουν οι σχέσεις
$x'=x_0+R\sin t_0+R\sin(t-t_0)$, $y'=y_0-R\cos t_0+R\cos(t-t_0)$, $z'=z_0$,
και άρα στο σύστημα αυτό η τροχιά είναι κύκλος
$(x'-x_0-R\sin t_0)^2+(y'-y_0+R\cos t_0)^2=R^2$, $z'=z_0$.
(δ) Με βάση τα προηγούμενα δικαιολογήστε γιατί η κίνηση φορτίου μέσα σε ομογενή πεδία $\vec{B}$, $\vec{E}$ με τυχαίο προσανατολισμό μπορεί να αναλυθεί σε τρεις επιμέρους κινήσεις:

- ▷ ομαλή κυκλική κίνηση σε επίπεδο κάθετο στο $\vec{B}$ με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=-\dfrac{q\vec{B}}{m}$,
- ▷ ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$, δηλ. μέτρου $\dfrac{E_\perp}{B}$ στη διεύθυνση $\vec{E}\times\vec{B}$,
- ▷ ευθύγραμμη και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_{\parallel 0}$ και επιτάχυνση $\dfrac{q\vec{E}_\parallel}{m}$,

όπου $\vec{E}_\parallel$ και $\vec{E}_\perp$ οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου πάνω και κάθετα στο μαγνητικό και $\vec{v}_{\parallel 0}$ η συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας πάνω στο $\vec{B}$.
(ε) Επαληθεύστε τα ακόλουθα, τα οποία επίσης δείχνουν πως μπορεί να αναλυθεί η κίνηση:
Αν θέσουμε $\vec{v}=\dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}+\vec{v}_{\parallel 0}+\dfrac{q\vec{E}_\parallel}{m}t+\vec{v}'$ στην εξίσωση κίνησης $m\dot{\vec{v}}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$ καταλήγουμε στην $m\dot{\vec{v}}'=q\vec{v}'\times\vec{B}$. Η τελευταία συνεπάγεται $\vec{v}'\cdot\dot{\vec{v}}'=0 \Leftrightarrow |\vec{v}'|=$ σταθερό, και άρα μπορεί να γραφεί $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt}=-\dfrac{q\vec{B}}{m}\times\hat{\varepsilon}$ με $\hat{\varepsilon}=\dfrac{\vec{v}'}{|\vec{v}'|}$, εξίσωση που περιγράφει ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}=-\dfrac{q\vec{B}}{m}$ (δείτε και το πρόβλημα 3 της 4ης εργασίας).
Η σχέση $m\dot{\vec{v}}'=q\vec{v}'\times\vec{B}$ συνεπάγεται επίσης ότι $\vec{v}'\cdot\vec{B}=$ σταθερό $=\vec{v}_0'\cdot\vec{B}$. Αφού αρχικά $\vec{v}_0'\perp\vec{B}$ η $\vec{v}'$ θα είναι πάντα κάθετη στο $\vec{B}$, δηλ. η κίνηση θα γίνεται σε επίπεδο κάθετο στο $\vec{B}$.
