Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2013-2014 Ν. Βλαχάκης

---

1. Έστω μονοδιάστατη κίνηση σώματος μάζας $m = 1$ σε πεδίο $V = 3x^2 - 2x^3$.
(α) Σχεδιάστε το γράφημα της δυναμικής ενέργειας. Ποια τα σημεία ισορροπίας και ποια η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω από τα ευσταθή;
(β) Για αρχικές συνθήκες $x = 0$, $\dot{x} = v_0 \leq 0$ περιγράψτε την κίνηση ανάλογα με την τιμή της v_0.
(γ) Αν αρχικά $x = 0$, $\dot{x} = \sqrt{2}$ δείξτε ότι το σώμα χρειάζεται άπειρο χρόνο για να φτάσει στο σημείο $x = 1$.
Υπόδειξη: Κοντά στο $x = 1$ είναι $V(x) \approx 1 - 3(x-1)^2$.
(δ) Σχεδιάστε τις διάφορες τροχιές στο διάγραμμα φάσης $x - \dot{x}$. Πόσες είναι οι τροχιές αυτές ανάλογα με την τιμή της ενέργειας; (Δώστε ιδιαίτερη προσοχή στις τιμές $E = 0$ και $E = 1$.)

---

2. Φορτίο q κινείται σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, τα οποία σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφονται $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{\varpi}\hat{\varpi}$ και $\vec{B} = B\hat{z}$, όπου λ και B σταθερές.
(α) Δείξτε ότι οι $\hat{\phi}$ και $\hat{z}$ συνιστώσες του νόμου Νεύτωνα $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ δίνουν τα ολοκληρώματα $m\varpi^2\left(\dot{\phi} + \dfrac{qB}{2m}\right) = L\,, \quad \dot{z} = v_z\,.$
(β) Χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα αυτά δείξτε ότι η $\hat{\varpi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα γράφεται $m\ddot{\varpi} = f(\varpi)$ με $f(\varpi) = -\dfrac{q^2B^2}{4m}\varpi + \dfrac{q\lambda}{\varpi} + \dfrac{L^2}{m\varpi^3}$ (η κίνηση ανάγεται σε «μονοδιάστατη»). Βρείτε την ενεργό δυναμική ενέργεια $V_{\rm eff} = -\int f(\varpi)d\varpi$ και το ολοκλήρωμα της ενέργειας $E_{\rm eff}$ για αυτή την κίνηση.
(γ) Δείξτε ότι το φορτίο κινείται πάντα μεταξύ δύο κυλίνδρων $\varpi_{\min} \leq \varpi \leq \varpi_{\max}$, οι ακτίνες των οποίων εξαρτώνται από τις τιμές των ολοκληρωμάτων L και $E_{\rm eff}$.
(δ) Πότε η κίνηση γίνεται σε ένα κύλινδρο $\varpi = \varpi_0 =$ σταθερό; Αν διαταράξουμε λίγο την κυλινδρική αυτή τροχιά (χωρίς να αλλάξουμε το ολοκλήρωμα L) ποια η περίοδος των ακτινικών ταλαντώσεων;
Υπόδειξη: Για τη μελέτη της $V_{\rm eff}$ παρατηρήστε ότι $\dfrac{dV_{\rm eff}}{d\varpi} = -f(\varpi) = \dfrac{q^2B^2}{4m\varpi^3}\left(\varpi^2 - C\right)\left(\varpi^2 - D\right)$, με $C = \dfrac{2\lambda m}{qB^2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{L^2B^2}{\lambda^2m^2}}\right)$, $D = \dfrac{2\lambda m}{qB^2}\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{L^2B^2}{\lambda^2m^2}}\right)$. Αν τα q, λ είναι ομόσημα είναι $C > 0$, $D < 0$, ενώ αν τα q, λ είναι ετερόσημα είναι $C < 0$, $D > 0$.
Δίνεται $\vec{a} = \left(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2\right)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d}{dt}\left(\varpi^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.
