Μηχανική Ι – Εργασία #4

Χειμερινό εξάμηνο 2013-2014 Ν. Βλαχάκης

1. Έστω δύναμη $\vec{F} = (y^2z^3 - \lambda xz^2)\,\hat{x} + 2xyz^3\hat{y} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,\hat{z}$, όπου λ σταθερά (όλα τα μεγέθη στο σύστημα μονάδων SI).

(α) Ποιο το έργο της $\vec{F}$ για μια κλειστή διαδρομή που αποτελείται από τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα Ο→Α→Β→Γ→Ο όπου Ο$(0,0,0)$, Α$(0,0,1)$, Β$(1,0,1)$, Γ$(1,1,1)$;

(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορούμε να κρίνουμε για ποια τιμή της σταθεράς λ ίσως η $\vec{F}$ είναι συντηρητική;
Για αυτή τη τιμή του λ είναι πράγματι συντηρητική;
Αν ναι, ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$;

---

2. Έστω πεδίο $\vec{F} = (-r+\sin\theta\cos\phi)\,\hat{r}+\lambda\cos\theta\cos\phi\,\hat{\theta}+F_\phi(r,\theta,\phi)\,\hat{\phi}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.
Για ποια σταθερά λ και ποια συνάρτηση $F_\phi(r,\theta,\phi)$ είναι συντηρητικό και ομαλό σε όλο το χώρο;
Ποια η δυναμική ενέργεια $V(r,\theta,\phi)$;
Γράψτε τη δυναμική ενέργεια σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Ποια η έκφραση της δύναμης σε αυτές τις συντεταγμένες;
Ποιες οι σταθερές x_0 και ω αν η $\{r = x_0\,[1+\sin(\omega t)]\,, \theta = \pi/2\,, \phi = 0\}$ είναι μια τροχιά σώματος μοναδιαίας μάζας στο παραπάνω συντηρητικό πεδίο;

---

3. Έστω κίνηση φορτίου σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, δηλ. κίνηση υπό δύναμη $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, όπου $\vec{B}$ σταθερό διάνυσμα.
(α) Δείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας μένει σταθερό.
(β) Δείξτε ότι η γωνία μεταξύ $\vec{v}$ και $\vec{B}$ μένει σταθερή.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι το $\vec{v}\cdot\vec{B}$ μένει σταθερό.
(γ) Αν $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{v}}{v}$ δείξτε ότι ο νόμος Νεύτωνα οδηγεί στην $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{\varepsilon}$ με κατάλληλο $\vec{\omega}$ (το οποίο και να βρείτε). Τι σημαίνει αυτή η σχέση;
(δ) Έστω στο φορτίο ασκείται επιπλέον δύναμη αντίστασης $-m\lambda\vec{v}$, δηλ. $m\dot{\vec{v}} = q\vec{v}\times\vec{B} - m\lambda\vec{v}$. Δείξτε τώρα ότι το διάνυσμα $\vec{u} = e^{\lambda t}\vec{v}$ ικανοποιεί την εξίσωση $m\dot{\vec{u}} = q\vec{u}\times\vec{B}$ και έχει σταθερό μέτρο, ίσο με το μέτρο της αρχικής ταχύτητας $\vec{v}_0$. Πως μεταβάλλεται με το χρόνο η κινητική ενέργεια του φορτίου; Δείξτε επίσης ότι για το μοναδιαίο $\hat{\varepsilon} = \dfrac{\vec{u}}{v_0}$ ισχύει $\dfrac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{\varepsilon}$.