

Μηχανική Ι – Εργασία #3

Χειμερινό εξάμηνο 2013-2014

Ν. Βλαχάκης

1. Στο πρώτο πρόβλημα της προηγούμενης εργασίας η τροχιά του Σ στο σύστημα Exy είναι $x = \cos t + t \sin t - 1$, $y = t \cos t - \sin t$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας θέσαμε $R = 1$, $\omega = 1$).

(α) Ποια η ταχύτητα και ποια η επιτάχυνση του Σ ; Ποια τα μοναδιαία στη φορά κίνησης και προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς; Βρείτε τις επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσες της επιτάχυνσης και την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς.

(β) Δείξτε ότι μια τέτοια τροχιά μπορεί να προκύψει και αν σε ένα σώμα μοναδιαίας μάζας που κινείται στο επίπεδο xy ασκείται δύναμη της μορφής $\vec{F} = -m\vec{a}_0 + m\omega^2\vec{r} + q\vec{v} \times \hat{z}$, όπου \vec{a}_0 , ω , q σταθερές και βρείτε αυτές τις σταθερές.

2. Σώμα μάζας m βρίσκεται ακίνητο στο σημείο $x = 0$ άξονα $x'Ox$. Τη στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ασκείται πάνω του δύναμη $\vec{F} = F_0 e^{-kx} \hat{x}$, ενώ υπάρχει αντίσταση με μέτρο ανάλογο της κινητικής ενέργειας, $F_{\text{αντ}} = \lambda \frac{mv^2}{2}$ (αντίρροπη της ταχύτητας).

(α) Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση που δίνει την ταχύτητα σαν συνάρτηση της θέσης γράφεται $\frac{dv^2}{dx} + \lambda v^2 = \frac{2F_0}{m} e^{-kx}$. Επιλύστε την και βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε κάθε θέση.

(β) Ποια η μορφή της λύσης αν $\lambda \rightarrow k$;

(γ) Όμοια αν $k \rightarrow 0$.

(δ) Έστω $\lambda = 2k$. Ποια η θέση του σώματος σε κάθε χρόνο;

3. Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους R , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο. Στο σώμα, εκτός το βάρος $m\vec{g}$ (με $\vec{g} = \text{σταθερό}$) και την τάση του νήματος T , ασκείται και αντίσταση από τον αέρα η οποία είναι αντίθετη της ταχύτητας και έχει μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της, $|F_a| = \frac{kmv^2}{2R}$, $k = \text{σταθερά}$. Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο και οριζόντιο και το σώμα ακίνητο. Να μελετηθεί η κίνηση του σώματος μέχρι να σταματήσει ξανά και συγκεκριμένα:

(α) Ποια η διαφορική εξίσωση που δίνει τη γωνία $\phi(t)$ που διαγράφει το νήμα μέχρι το χρόνο t ;

(β) Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση που δίνει την $v(\phi)$ είναι $dv^2/d\phi + kv^2 = 2gR \cos \phi$ και επιλύστε την ως προς v^2 .

(γ) Ποια πρέπει να είναι η σταθερά k ώστε το σώμα να σταματήσει στιγμιαία αφού διαγράψει γωνία $3\pi/4$;