

Μηχανική Ι – Εργασία #1

Χειμερινό εξάμηνο 2013-2014

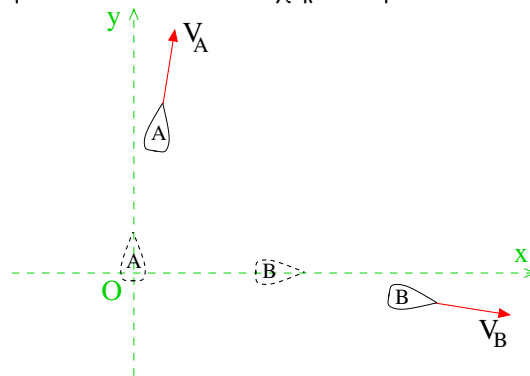
Ν. Βλαχάκης

1. (α) Υποθέτοντας ότι η περίοδος T ενός εκκρεμούς εξαρτάται από το μήκος του ℓ , τη μάζα του m και την επιτάχυνση της βαρύτητας g , βρείτε με διαστατική ανάλυση τους εκθέτες στη σχέση $T \propto m^a \ell^b g^c$.

(β) Αν ένα ωρολογιακό εκκρεμές καθυστερεί ένα δευτερόλεπτο ανά λεπτό, πόσο πρέπει να αλλάξουμε το μήκος του για να μετρά σωστά το χρόνο;

2. Δύο ταχύπλοα A και B βρίσκονται ακίνητα απέχοντας μεταξύ τους απόσταση R . Έστω Oxy το επίπεδο της θάλασσας και οι αρχικές θέσεις $\vec{r}_{A0} = 0$, $\vec{r}_{B0} = R\hat{x}$.

(α) Οι οδηγοί συμφωνούν να τρέξουν με τρόπο ώστε κάθε στιγμή ο B να έχει ταχύτητα ίδιου μέτρου, αλλά κάθετη σε αυτή του A όπως στο σχήμα, δηλ. $\vec{v}_B = \vec{v}_A \times \hat{z}$.



Πως πρέπει να κινηθεί ο A ώστε να συναντήσει τον B;

Υπόδειξη: Ολοκληρώστε την $\vec{v}_B = \vec{v}_A \times \hat{z}$.

(β) Ποια είναι η απάντηση αν οι οδηγοί τρέξουν με ταχύτητες που έχουν σταθερό λόγο μέτρων $\lambda = v_B/v_A$ και σταθερή γωνία ϕ μεταξύ τους;

Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\vec{v}_B = \lambda(\cos \phi \vec{v}_A + \sin \phi \vec{v}_A \times \hat{z})$.

3. Σώμα έχει διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = \left(\frac{8}{3}t^3 - 12t^2\right)\hat{x} + (4t^2 - \lambda t)\hat{y} \quad (\text{στο σύστημα SI}).$$

(α) Ποιο το λ ώστε η ταχύτητα του σώματος να μηδενίζεται κάποια χρονική στιγμή;

(β) Σε ποιο χρόνο η επιτάχυνση του σώματος είναι παράλληλη στον άξονα y ;

(γ) Ποιο το λ ώστε η ταχύτητα και η επιτάχυνση να είναι κάθετες στο χρόνο $t = 1$;

(δ) Ποιο το λ ώστε η ταχύτητα και η επιτάχυνση να είναι παράλληλες στο χρόνο $t = 1$;

(ε) Για $\lambda = 24$, δείξτε ότι το μήκος που διανύει το σώμα από $t = 0$ ως $t = t_f$, με $t_f \leq 3$, είναι $\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{1+t_f^2}(2-9t_f+2t_f^2) + 12\text{arcsinh } t_f$.

$$\Deltaίνονται τα ολοκληρώματα $\int_0^t \sqrt{1+t^2} dt = \frac{t\sqrt{1+t^2} + \text{arcsinh } t}{2}$, $\int_0^t t\sqrt{1+t^2} dt = \frac{(1+t^2)^{3/2} - 1}{3}$.$$