

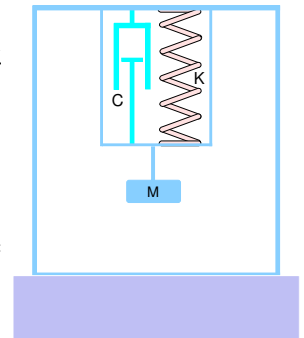
## Μηχανική Ι – Εργασία #6

Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013  
Παράδοση 30/11/2012

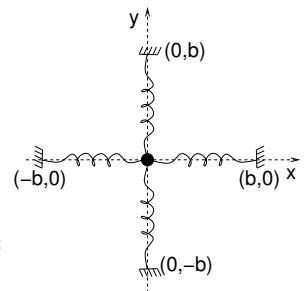
23/11/2012  
Ν. Βλαχάκης

1. Ένας απλός σειсмоγράφος που καταγράφει την κατακόρυφη κίνηση του εδάφους φαίνεται στο δίπλα σχήμα. (Σε ένα σεισμό υπάρχει και οριζόντια κίνηση, την οποία θα μπορούσαμε να καταγράψουμε με μια ίδια διάταξη, αφού την περιστρέψουμε κατά  $90^\circ$ .)

Η δύναμη από το σύστημα ελατηρίου-αποσβεστήρα είναι  $(-Kx - C\dot{x})\hat{x}$ , όπου  $x$  η μετατόπιση της  $M$  από τη θέση ισορροπίας της όταν το έδαφος είναι ακίνητο. Αν το έδαφος εκτελεί ταλαντωτική κατακόρυφη κίνηση  $X = X_0 \cos(\omega t)$  βρείτε την εξίσωση κίνησης της  $M$ . Αγνοώντας το μέρος της λύσης που σβήνει με το χρόνο, ποιο το πλάτος ταλάντωσης της  $M$ ;



2. Σώμα μάζας  $m$  κινείται σε οριζόντιο τραπέζι στην επιφάνεια της περιστρεφόμενης γης (με γωνιακή ταχύτητα περιστροφής  $\vec{\omega}$ ), σε τόπο γεωγραφικού πλάτους  $\lambda$ , δεμένο σε τέσσερα ίδια ελατήρια όπως στο σχήμα. Τα ελατήρια έχουν σταθερά  $k = m\omega_0^2/2$  και φυσικό μήκος  $b$ . Θεωρούμε αμελητέες την τριβή και την αντίσταση του αέρα.



(α) Δείξτε ότι για μικρές μετατοπίσεις από την αρχή των αξόνων ( $|x|/b, |y|/b \ll 1$ ) η συνολική δύναμη από τα ελατήρια είναι  $\Sigma \vec{F}_{\text{ελατ}} \approx -m\omega_0^2(x\hat{x} + y\hat{y}) = -m\omega_0^2\vec{r}$ .

(β) Δείξτε ότι αν στην εξίσωση κίνησης αμελήσουμε όρους που είναι ανάλογοι του  $\omega^2$ , αυτή γράφεται  $m\vec{a}_\sigma = \Sigma \vec{F}_{\text{ελατ}} + m\vec{g} + \vec{N} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma$ , όπου  $\vec{N}$  η κάθετη αντίδραση από το τραπέζι. Διώχνοντας τις κατακόρυφες δυνάμεις (που εξουδετερώνονται) δείξτε ότι η κίνηση του σώματος πάνω στο οριζόντιο τραπέζι περιγράφεται από την  $\vec{a}_\sigma = -\omega_0^2\vec{r} - 2\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}_\sigma$ , όπου  $\vec{\omega}_\perp$  η συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας κάθετα στο επίπεδο. Γράψτε τις συνιστώσες της εξίσωσης αυτής σε πολικές συντεταγμένες. Δείξτε ότι η  $\hat{\phi}$  συνιστώσα δίνει το ολοκλήρωμα  $r^2(\dot{\phi} + \omega \sin \lambda) = \text{σταθερά}$ .

(γ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται στο  $r = 0$  και έχει ταχύτητα  $v_0\hat{x}$  (με  $v_0 \ll \omega_0 b$  ώστε να ισχύει  $r \ll b$  σε όλη την κίνηση). Βρείτε την  $\phi(t)$  χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα που αναφέρθηκε. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην  $\hat{r}$  συνιστώσα της εξίσωσης κίνησης βρείτε την  $r(t)$  (αγνοώντας όρους ανάλογους του  $\omega^2$ ). Περιγράψτε την κίνηση και σχεδιάστε την τροχιά μέχρι το σώμα να ξαναβρεθεί στην αρχή των αξόνων. Μιας και οι τελικές συνθήκες (θέση και ταχύτητα) μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες των αρχικών (σε ένα άλλο σύστημα αξόνων), η τροχιά μπορεί να επεκταθεί σε μεγαλύτερους χρόνους. Σχεδιάστε την πλήρη τροχιά για  $\omega_0 = 10\omega \sin \lambda$ .

Δίνεται η γενική σχέση  $\vec{a}_\sigma = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$  και η έκφραση της

επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες  $\vec{a}_\sigma = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\phi})}{dt} \hat{\phi}$ .