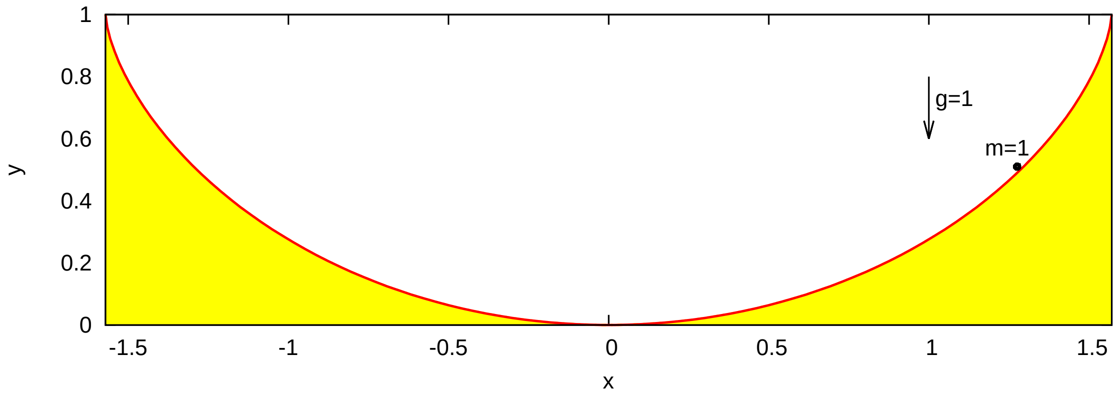
Μηχανική Ι – Εργασία #5

Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013 — 13/11/2012
Παράδοση 23/11/2012 — Ν. Βλαχάκης

1. Έστω ιδανικό εκκρεμές αποτελούμενο από σημειακό σώμα δεμένο σε νήμα μήκους ℓ, μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας g. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στην κατώτερη θέση και έχει οριζόντια ταχύτητα $v_0 = \sqrt{7g\ell/2}$.
(α) Σε ποια θέση το νήμα θα χαλαρώσει; Ποια η ταχύτητά του $\vec{v}_1$ στη θέση αυτή; Σε ποιο χρόνο φτάνει το σώμα σε αυτή τη θέση; (Δώστε το αποτέλεσμα σαν ένα ορισμένο ολοκλήρωμα.)
(β) Από το σημείο αυτό και μετά το σώμα εκτελεί πλάγια βολή. Βρείτε τη θέση σαν συνάρτηση του χρόνου για τη βολή αυτή. Πότε θα ξανατεντωθεί το νήμα; Ποια η θέση του σώματος τη στιγμή εκείνη;

2. Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται σε μια «κοιλάδα» μέσα σε πεδίο βαρύτητας $\vec{g} = -\hat{y}$. Η «κοιλάδα» έχει παραμετρική εξίσωση

$$x = \arcsin\xi + \xi\sqrt{1-\xi^2}\,, \quad y = \xi^2\,, \quad \text{με } \xi \in [-1,1]\,.$$



(α) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα ενέργειας οδηγεί στην εξίσωση κίνησης $\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\xi^2 =$ σταθερά, ή παραγωγίζοντας $\ddot{\xi} + \frac{1}{2}\xi = 0$, δηλ. το $\xi(t)$ ικανοποιεί εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή.
(β) Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = y = 0$ και έχει ταχύτητα $\sqrt{2}\hat{x}$ βρείτε την $\xi(t)$ και τις $x(t)$, $y(t)$.

3. (α) Μελετήστε τις μικρές ταλαντώσεις ιδανικού εκκρεμούς μέσα σε υγρό. Η συνισταμένη βάρους και άνωσης είναι $m\omega_0^2 R$ (m η μάζα του σώματος, R η ακτίνα του νήματος και ω_0 σταθερά), ενώ η αντίσταση από το υγρό είναι $-2m\gamma\vec{v}$ (όπου γ θετική σταθερά). Δώστε τη λύση $\phi(t)$ στις περιπτώσεις $\omega_0 > \gamma$, $\omega_0 < \gamma$ και $\omega_0 = \gamma$.
(β) Όμοια αν το υγρό κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{c}\sin(\omega t)$, όπου $\vec{c}$ μια σταθερή οριζόντια ταχύτητα. Σε αυτή την περίπτωση η αντίσταση είναι $-2m\gamma\vec{v}_{\sigma\chi} = -2m\gamma[\vec{v} - \vec{c}\sin(\omega t)]$.