

## Μηχανική Ι – Εργασία #4

Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013  
Παράδοση 13/11/2012

2/11/2012  
N. Βλαχάκης

1. Σώμα κινείται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι, δεμένο σε αβαρές νήμα ακτίνας  $R$  του οποίου το άλλο άκρο είναι σταθερό. Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο και το σώμα έχει ταχύτητα  $\vec{v}_0$  κάθετα στο νήμα. Στο σώμα ασκείται εκτός της δύναμης του νήματος και αντίσταση  $-mk\vec{v}$  (με  $k$  θετική σταθερά).

(α) Δείξτε ότι σε κάθε στιγμή η δύναμη του νήματος είναι ανάλογη της κινητικής ενέργειας.

(β) Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου. Ποιος ο χρόνος υποδιπλασιασμού της ταχύτητας και σε πόσο χρόνο το σώμα πρακτικά σταματά;

(γ) Βρείτε την γωνία που διαγράφει το νήμα σαν συνάρτηση του χρόνου και δείξτε ότι αποκτά μέγιστη τιμή  $v_0/kR$ .

2. Έστω πεδίο δυνάμεων  $\vec{F} = [(\lambda^2 - 1)x - 2\lambda y]\hat{x} + [(\lambda^2 - 1)y + 2\lambda x]\hat{y}$ , με  $\lambda =$  σταθερά.

(α) Είναι συντηρητικό;

(β) Σώμα μάζας  $m = 1$  κινείται στο παραπάνω πεδίο δυνάμεων διαγράφοντας τροχιά

$$x = \frac{\lambda \cos t + \sin t}{1 + \lambda^2} e^{\lambda t}, \quad y = \frac{\lambda \sin t - \cos t}{1 + \lambda^2} e^{\lambda t}, \quad z = 0.$$

(β<sub>1</sub>) Βρείτε το έργο της δύναμης  $\vec{F}$  για την κίνηση μεταξύ δύο χρονικών στιγμών  $t_1$  και  $t_2$ , χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση της τροχιάς που δόθηκε, οπότε  $W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$ .

(β<sub>2</sub>) Βρείτε την μεταβολής κινητικής ενέργειας και δείξτε ότι ισούται με το έργο.

3. Σώμα μάζας  $m = 1$  κινείται σε ευθεία υπό την επίδραση πεδίου δύναμης

$$\vec{F} = \begin{cases} \left( \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) \hat{x}, & \text{αν } |x| > 1 \\ 0, & \text{αν } |x| < 1 \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι

$$V = \begin{cases} \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + C, & \text{αν } x \geq 1 \\ 1 + C, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 + C, & \text{αν } x \leq -1 \end{cases}$$

όπου  $C$  αυθαίρετη σταθερά (την οποία και μηδενίζουμε για ευκολία).

(β) Αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας  $x = 4$  και έχει ταχύτητα  $v_0 < 0$ .

(β<sub>1</sub>) Περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της αρχικής ταχύτητας. Για ποιες τιμές η κίνηση είναι ταλάντωση, για ποιες το σώμα φτάνει στο  $x = -\infty$  και για ποιες το σώμα φτάνει στο  $x = +\infty$ ;

(β<sub>2</sub>) Βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων για  $v_0 \approx 0$ .

(β<sub>3</sub>) Βρείτε τα άκρα της κίνησης και την περίοδο για  $v_0 = -1/6$ .

(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για το δοσμένο πεδίο δύναμης.

$$\text{Δίνεται } \int_a^b \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}} = \frac{\pi(a + b)}{2}.$$