

Μηχανική Ι – Εργασία #3

Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013
Παράδοση 2/11/2012

26/10/2012
Ν. Βλαχάκης

1. Σώμα μάζας m κινείται κατακόρυφα, έχοντας αρχική θέση $z = z_0$ και ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0\hat{z}$. Το σώμα κινείται υπό την επίδραση του (σταθερού) βάρους του $m\vec{g} = -mg\hat{z}$ (η φορά του άξονα z είναι προς τα πάνω) και αντίστασης μέτρου ανάλογου της ταχύτητας, $\vec{F}_a = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ (με σταθερό τ).
- (α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης. Χωρίς να τη λύσετε, βρείτε την οριακή ταχύτητα $v_{op}\hat{z}$ που θα αποκτήσει το σώμα σε μεγάλους χρόνους.
- (β) Λύστε την εξίσωση κίνησης και βρείτε την $v = v(t)$ (όπου $v = \dot{z}$ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας). Σε πόσο χρόνο πρακτικά η ταχύτητα αποκτά την οριακή της τιμή;
- (γ) Κάντε στο ίδιο διάγραμμα με άξονες t και v τα γραφήματα της $v = v(t)$ για τις περιπτώσεις: $v_0 > 0$, $v_0 = 0$, $v_{op} < v_0 < 0$, $v_0 = v_{op}$, $v_0 < v_{op}$.
- (δ) Ολοκληρώστε τη σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (β) για να βρείτε την $z = z(t)$.
- (ε) Απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ των απαντήσεων στα ερωτήματα (β) και (δ) βρείτε την $z = z(v)$.
- (στ) Βρείτε την $z = z(v)$ ολοκληρώνοντας άμεσα την εξίσωση κίνησης, θέτοντας $\dot{v} = v \frac{dv}{dz}$.

2. Έστω στο προηγούμενο πρόβλημα το σώμα αφήνεται από ύψος z_0 πάνω από ελαστικό επίπεδο. Αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες μονάδες μπορούμε να θέσουμε $g = \tau = 1$ (μετράμε τα μήκη σε $g\tau^2$, τους χρόνους σε τ και τις ταχύτητες σε $g\tau$).
- (α) Ποια σχέση καθορίζει την ταχύτητα $-v_1\hat{z}$ που έχει το σώμα όταν φτάνει στο επίπεδο $z = 0$;
- (β) Το σώμα ανακλάται ελαστικά από το επίπεδο. Σε ποιο μέγιστο ύψος z_1 θα φτάσει;
- (γ) Η παραπάνω κίνηση επαναλαμβάνεται, δηλ. το σώμα φτάνει ξανά στο επίπεδο με ταχύτητα $-v_2\hat{z}$, ανακλάται ελαστικά, ανεβαίνει μέχρι ύψος z_2 , κ.ο.κ. Θέλουμε να φτιάξουμε τις ακολουθίες των z_n και v_n . Δείξτε ότι για γνωστό z_n , το v_{n+1} βρίσκεται από

$$z_n = -v_{n+1} - \ln(1 - v_{n+1})$$

και για γνωστό v_{n+1} , το z_{n+1} βρίσκεται από

$$z_{n+1} = v_{n+1} - \ln(1 + v_{n+1})$$

Βρείτε τις τιμές γραφικά στο επόμενο διάγραμμα για ένα z_0 που θα επιλέξετε.

