Μηχανική I – Εργασία #2

Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013 19/10/2012
Παράδοση 26/10/2012 Ν. Βλαχάκης

1. Έστω περιγράφουμε την κίνηση σώματος χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ).
(α) Γράψτε τα (x, y, z) συναρτήσει των (r, θ, ϕ) και αντίστροφα.
(β) Γράψτε το $\vec{r}$ συναρτήσει των (r, θ, ϕ) και των καρτεσιανών μοναδιαίων $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Βρείτε τις παραγώγους $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r}$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ καθώς και τα μοναδιαία $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$.
(Είναι $\hat{r} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} / \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|$ και όμοια για τα άλλα δύο μοναδιαία.)
Σχεδιάστε τα μοναδιαία σε ένα σύστημα συντεταγμένων και επαληθεύστε ότι αποτελούν τοπικό ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα (με $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$).
(γ) Δείξτε ότι η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec{r} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi$ γράφεται $d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r \sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$. Σχεδιάστε σε ένα σύστημα συντεταγμένων την μεταβολή $dr\,\hat{r}$ που αντιστοιχεί σε μεταβολή του r κατά dr, κρατώντας σταθερά τα θ και ϕ. Όμοια για τα άλλα δύο μέρη του $d\vec{r}$.
(δ) Χρησιμοποιώντας τη σχέση πληρότητας βρείτε τα $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ συναρτήσει των (r, θ, ϕ) και των μοναδιαίων $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$.
(ε) Η θέση στις σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται $\vec{r} = r\hat{r}$. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο βρείτε την έκφραση της ταχύτητας $\vec{v}$. Πως το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και από την έκφραση του $d\vec{r}$ (ερώτημα γ);
(στ) Παραγωγίζοντας την $\vec{v}$ βρείτε την έκφραση της επιτάχυνσης $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\,\sin\theta + 2\dot{r}\,\dot{\phi}\,\sin\theta + 2r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\cos\theta\right)\hat{\phi}$.
(ζ) Χρησιμοποιώντας την έκφραση της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\phi\,\hat{\phi}$ γράψτε
(ζ_1) την έκφραση του στοιχειώδους μήκους καμπύλης,
(ζ_2) την έκφραση στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στην σφαιρική επιφάνεια $r =$ σταθερό,
(ζ_3) την έκφραση στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στην κωνική επιφάνεια $\theta =$ σταθερό,
(ζ_4) την έκφραση στοιχειώδους επιφάνειας πάνω στην επίπεδη επιφάνεια $\phi =$ σταθερό,
(ζ_5) την έκφραση του στοιχειώδους όγκου.

2. Δαχτυλίδι κινείται περασμένο σε λείο σύρμα. Η επιτάχυνσή του (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) σαν συνάρτηση του χρόνου t είναι $\vec{a} = (\lambda\cos t - \sin t)\, e^{\lambda t}\hat{x} + (\lambda \sin t + \cos t)\, e^{\lambda t}\hat{y}$, όπου λ σταθερά. Αρχικά (για $t = 0$) το σώμα βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_0 = \dfrac{\lambda\hat{x} - \hat{y}}{1 + \lambda^2}$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0 = \hat{x}$.
(α) Βρείτε την θέση και την ταχύτητα σε κάθε χρόνο.
(Ένας τρόπος για να βρείτε τα $\int \cos t\, e^{\lambda t} dt$ και $\int \sin t\, e^{\lambda t} dt$ είναι η παραγοντική ολοκλήρωση.)
(β) Ποιο το μοναδιαίο $\hat{t}(t)$ στη φορά κίνησης, ποια η γωνία μεταξύ ταχύτητας $\vec{v}$ και θέσης $\vec{r}$ και ποια η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\varepsilon(t)$;
(γ) Ποια η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\kappa(t)$, ποιο το μοναδιαίο $\hat{n}(t)$ προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς και ποια η ακτίνα καμπυλότητας $R(t)$;

3. Σώμα κινείται πάνω στην επιφάνεια $\varpi = 1 + z^2$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες). Σχεδιάστε την επιφάνεια αυτή. Η θέση συναρτήσει του χρόνου είναι $\varpi = 1 + \sin^2 t$, $\phi = 2t$, $z = \sin t$. Σχεδιάστε την τροχιά. Είναι η κίνηση περιοδική; Αν ναι ποια η περίοδος;