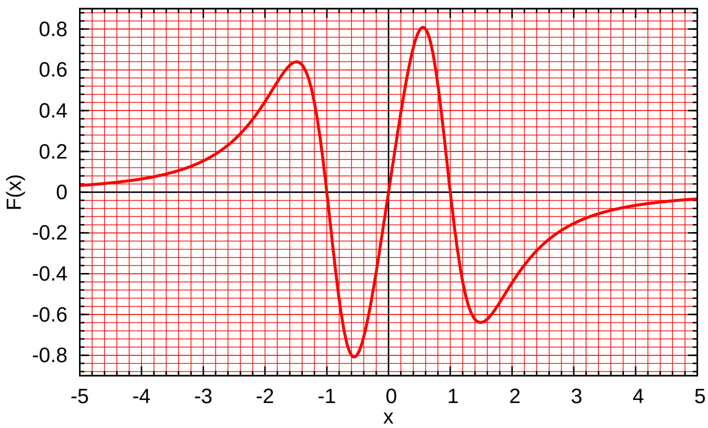
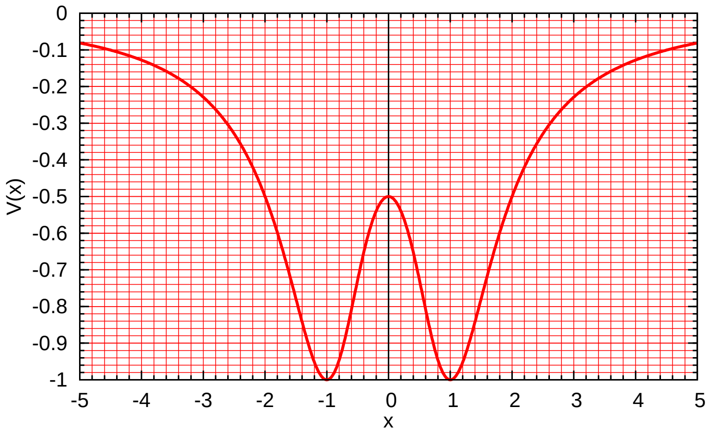
$\boxed{1}$: Έστω μονοδιάστατη κίνηση σώματος μοναδιαίας μάζας στο πεδίο δύναμης $F(x)$ με το ακόλουθο γράφημα (σε κατάλληλες μονάδες).



Ακολουθεί το γράφημα της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας (σε μεγάλες αποστάσεις $x \to \pm\infty$ τείνει στο 0). Δίνεται η συνάρτησή της $V(x) = -\dfrac{2x^2+1}{x^4+2}$ (παρότι όλα τα ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν μόνο με τη χρήση των σχημάτων).



(α) Ποια τα σημεία ισορροπίας; Ποια από αυτά είναι ευσταθή;
(β) Υπολογίστε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας.
(γ) Σχεδιάστε σε ελεύθερη κλίμακα τις τροχιές στο χώρο φάσης $(x, \dot{x})$ καλύπτοντας όλες τις διαφορετικές συμπεριφορές ανάλογα με την ενέργεια του σώματος.
(δ) Έστω το σώμα αρχικά βρίσκεται στο $x = -2$ και έχει ταχύτητα v_0. Περιγράψτε την κίνηση στις περιπτώσεις: (δ_1) $v_0 = 0$, (δ_2) $v_0 = 1/\sqrt{2}$, (δ_3) $v_0 = 1$, (δ_4) $v_0 = \sqrt{2}$.

$\boxed{2}$: Ένας σκιέρ μάζας m κατεβαίνει μια χιονισμένη πλαγιά σταθερής γωνίας κλίσης ϕ, υπό την επίδραση του βάρους του, τριβής ολίσθησης με συντελεστή $\mu < \tan\phi$ και αντίστασης αέρα μέτρου $F_a = \lambda v^2$.
(α) Βρείτε την ταχύτητά του σαν συνάρτηση του μήκους x που διανύει (αρχικά $v|_{x=0} = 0$).
(β) Πόσο μήκος πρέπει να διανύσει ο σκιέρ ώστε η ταχύτητά του να αποκτήσει πρακτικά την οριακή τιμή της; Ποια είναι αυτή η οριακή τιμή;
Εφαρμόστε για $m = 70$ kg, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\phi = 10^{\circ} = \arcsin 0.174 = \arccos 0.985$, $\mu = 0.1$, $\lambda = \frac{1}{2} C_D S \rho$ με $C_D = 0.3$, επιφάνεια $S = 1$ m^2 και πυκνότητα αέρα ρ που αντιστοιχεί σε πίεση 0.9 atm (9×10^4 N m^{-2}) και θερμοκρασία 7°C (280°K). Δίνεται το μέσο βάρος των μορίων του αέρα $m_a = 29 m_p = 4.8 \times 10^{-26}$ kg και η σταθερά Boltzmann $k_{\rm B} = 1.38 \times 10^{-23}$ J °K^{-1}.
(γ) Ποια θα ήταν η οριακή ταχύτητα αν φυσούσε αέρας με ταχύτητα w παράλληλα στην πλαγιά, με φορά ίδια με την κίνηση του σκιέρ; (Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση κίνησης για να απαντήσετε.)
Εφαρμόστε για $w = 5$ Beaufort (9 m s^{-1}).
(δ) Δυο σκιέρ με ίδιο βάρος και σωματική διάπλαση κατεβαίνοντας μαζί την πλαγιά απέκτησαν οριακή ταχύτητα $\sqrt{2}$ φορές μεγαλύτερη από την οριακή που αποκτά ο καθένας όταν κατεβαίνει μόνος του. Πως το κατάφεραν αυτό;

$\boxed{3}$: Σε ένα αστροφυσικό δίσκο προσαύξησης, σώμα μάζας m ακολουθεί σπειροειδή τροχιά προς την κεντρική μάζα M. Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της ταχύτητας ακολουθεί το νόμο Kepler, $v_\phi = \sqrt{GM/\varpi}$, ενώ η στροφορμή $L = m\varpi v_\phi$ ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό $\dot{L} = -\lambda$. Αν για $t = 0$ η θέση του σώματος είναι $\vec{r} = \varpi_0 \hat{x}$ (δηλ. $\varpi = \varpi_0$ και $\phi = 0$), ποια η θέση του σώματος σε κάθε χρόνο, δηλ. ποια τα $\varpi(t)$ και $\phi(t)$ σε πολικές συντεταγμένες; Ποια η εξίσωση τροχιάς του σώματος;

$\boxed{4}$: Έχουμε σκάψει δύο ευθύγραμμα τούνελ που διαπερνούν την περιστρεφόμενη γη: Το ένα ενώνει βόρειο και νότιο πόλο (βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής). Το δεύτερο είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής και περνά από το κέντρο της γης (ενώνει δύο σημεία του ισημερινού).
(α) Αφήνουμε σώμα στο άκρο του πρώτου τούνελ (στο βόρειο πόλο). Το σώμα έχει διατομή λίγο μικρότερη από τη διατομή του τούνελ και δεν ακουμπά στα τοιχώματα όταν το αφήνουμε. Αν αγνοήσουμε τις τριβές σε πόσο χρόνο θα ξαναγυρίσει στο σημείο που το αφήσαμε;
(β) Όμοια στο δεύτερο τούνελ (στον ισημερινό).
(γ) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και τούνελ είναι $\mu = 0.1$, ποια η θέση σαν συνάρτηση του χρόνου για την κίνηση σε κάθε ένα από τα δύο τούνελ; Θα καταλήξει το σώμα στο κέντρο της γης; Αν ναι σε πόσο χρόνο;
Θεωρήστε δεδομένο ότι η επιτάχυνση βαρύτητας στο εσωτερικό της γης μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο, $\vec{g} = -(g_0/R)\vec{r}$, με $g_0 = 9.8$ m/s^2, $R = 6.4 \times 10^6$ m. Επίσης το σώμα σε κάθε περίπτωση κινείται χωρίς να χτυπά από τη μια στην άλλη πλευρά των τοιχωμάτων του τούνελ: είτε κινείται χωρίς να ακουμπά στα τοιχώματα όπως όταν το αφήνουμε, είτε, αν υπάρχει λόγος, βρίσκεται σε συνεχή επαφή με μια πλευρά.
Υπόδειξη: Για ένα τρόπο λύσης θα χρειαστεί η $\vec{a}_\sigma = \Sigma\vec{F}/m - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$.
Για ένα δεύτερο τρόπο λύσης θα χρειαστεί η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες
$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

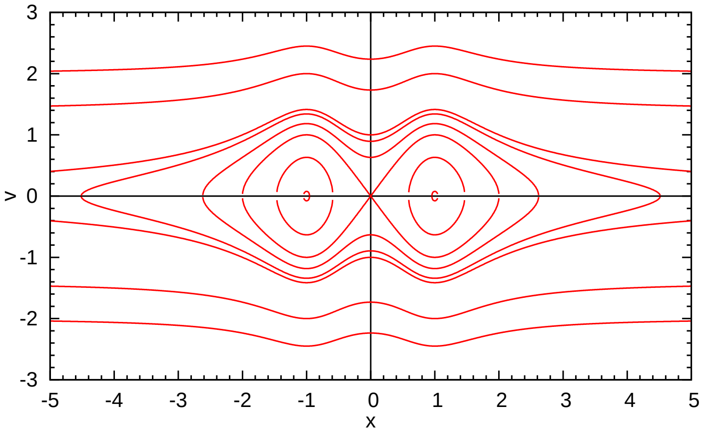
ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:

(α) Σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα της $V(x)$ (ή τα σημεία μηδενισμού της δύναμης), $x = -1\,,0\,,1$. Ευσταθή είναι τα $x = \pm 1$ στα οποία η $V(x)$ είναι ελάχιστη (ή η $F(x) \approx -k(x \mp 1)$ με $k > 0$ κοντά στα σημεία αυτά).

(β) Η κλίση της $F(x)$ κοντά στα $x = \pm 1$ είναι $\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \dfrac{(-0.24) - 0.28}{1.1 - 0.9} = -2.6$ (από το σχήμα εκτιμώ ότι η καμπύλη περνά από τα σημεία $(0.9\,, 0.28)$, και $(1.1\,, -0.24)$). 'ρα $F \approx -k(x \mp 1)$ με $k \approx 2.6$. Είναι $T = 2\pi\sqrt{m/k} \approx 3.9$.[1]

(γ)



(δ$_1$) $E = V(-2) = -1/2$. Όρια τροχιάς τα $x = -2$ και $x = 0$. Το σώμα κινείται προς μεγαλύτερα x, μέχρι το $x = 0$ (χρειάζεται άπειρο χρόνο να φτάσει στο $x = 0$).

(δ$_2$) $E = 1/4 + V(-2) = -1/4$. Όρια τροχιάς τα $x_{1,2} = \pm 2.9$.[2] Το σώμα εκτελεί ταλάντωση.

(δ$_3$) $E = 0$. Το σώμα κινείται μέχρι το $x = \infty$ όπου φτάνει χωρίς ταχύτητα.

(δ$_4$) $E = 1/2$. Το σώμα κινείται μέχρι το $x = \infty$ όπου φτάνει με ταχύτητα 1.

$\boxed{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} m\dot{v} = mg\sin\phi - T - F_a \\ N - mg\cos\phi = 0 \\ T = \mu N \\ F_a = \lambda v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{v} = g\,(\sin\phi - \mu\cos\phi) - \frac{\lambda}{m}v^2$$

Η ταχύτητα αποκτά $v_{o\rho} = \sqrt{\dfrac{mg\,(\sin\phi - \mu\cos\phi)}{\lambda}}$ (τότε $\dot{v} = 0$). Θέτω $\dot{v} = v\dfrac{dv}{dx}$ οπότε $v\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\lambda}{m}v_{o\rho}^2 - \dfrac{\lambda}{m}v^2$

$$\Leftrightarrow \int_0^x dx = \int_0^v \frac{v\;dv}{\frac{\lambda}{m}v_{o\rho}^2 - \frac{\lambda}{m}v^2} = \frac{m}{2\lambda}\int_0^{v^2}\frac{dv^2}{v_{o\rho}^2 - v^2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|1 - \frac{v^2}{v_{o\rho}^2}\right| = -2\frac{\lambda}{m}x$$

Για $v \to v_{o\rho}$ είναι $x \to \infty$, οπότε ισχύει πάντα $0 \le v \le v_{o\rho}$. Είναι λοιπόν $\ln\left(1 - \dfrac{v^2}{v_{o\rho}^2}\right) = -2\dfrac{\lambda}{m}x \Leftrightarrow 1 - \dfrac{v^2}{v_{o\rho}^2} = e^{-2\frac{\lambda}{m}x} \Leftrightarrow v = v_{o\rho}\sqrt{1 - e^{-2\frac{\lambda}{m}x}}$

Αλλιώς: Η $v\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\lambda}{m}v_{o\rho}^2 - \dfrac{\lambda}{m}v^2$, με $h = v^2$ γράφεται $\dfrac{dh}{dx} + 2\dfrac{\lambda}{m}h = 2\dfrac{\lambda}{m}v_{o\rho}^2$, δηλ. μια μη-ομογενής γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Η λύση της ομογενούς είναι ανάλογη του $e^{-2\frac{\lambda}{m}x}$, ενώ μια μερική λύση (σταθερή) είναι η $v_{o\rho}^2$. 'ρα $v^2 = Ce^{-2\frac{\lambda}{m}x} + v_{o\rho}^2$. Από την αρχική συνθήκη $v = 0$ για $x = 0$ βρίσκουμε τη σταθερά $C = -v_{o\rho}^2$, οπότε $v = v_{o\rho}\sqrt{1 - e^{-2\frac{\lambda}{m}x}}$.

(β) Όταν ο εκθέτης $2\dfrac{\lambda}{m}x \approx 5$ πρακτικά το εκθετικό μηδενίζεται και $v \approx v_{o\rho}$. 'ρα $x \approx \dfrac{5m}{2\lambda}$

Εφαρμογή: $P = \dfrac{\rho}{m_a}k_{\rm B}T \Leftrightarrow \rho = \dfrac{m_a P}{k_{\rm B}T} = \dfrac{4.8\times 10^{-26}\times 9\times 10^4}{1.38\times 10^{-23}\times 280}$ kg m^{-3} $= 1.12$ kg m^{-3}.

$\lambda = \dfrac{1}{2}\times 0.3\times 1\times 1.12$ kg m^{-1} $= 0.17$

$x \approx \dfrac{5\times 70}{2\times 0.17}$ m $= 1029$ m

$v_{o\rho} = \sqrt{\dfrac{70\times 9.8\,(0.174 - 0.1\times 0.985)}{0.17}}$ m s^{-1} $= 17.45$ m s^{-1} $= 63$ km h^{-1}

(γ) Η ταχύτητα του σκιέρ ως προς τον αέρα είναι $\vec{v} - \vec{w} = (v - w)\hat{x}$. 'ρα η αντίσταση είναι $\vec{F}_a = -\lambda(v - w)^2\dfrac{\vec{v} - \vec{w}}{|\vec{v} - \vec{w}|}$ και η εξίσωση κίνησης $\dot{v} = g\,(\sin\phi - \mu\cos\phi) - \dfrac{\lambda}{m}(v - w)^2\dfrac{v - w}{|v - w|}$. Όταν $\dot{v} = 0$ η νέα οριακή είναι (πρέπει $v - w > 0$) $v'_{o\rho} = w + v_{o\rho} = 17.45$ m s^{-1} $+ 9$ m s^{-1} $= 26.45$ m s^{-1} ≈ 95 km h^{-1}.

Αλλιώς: Στο σύστημα αναφοράς όπου ο αέρας δεν έχει ταχύτητα, η οριακή ταχύτητα του σκιέρ είναι αυτή που βρέθηκε πριν (στο σύστημα αυτό οι αρχικές συνθήκες είναι διαφορετικές, αλλά η οριακή ταχύτητα δεν εξαρτάται από αυτές και παραμένει ίδια). 'ρα στο σύστημα στο οποίο ο αέρας κινείται με ταχύτητα $\vec{w}$ θα είναι $\vec{v}'_{o\rho} = \vec{w} + \vec{v}_{o\rho}$, ή αλγεβρικά $v'_{o\rho} = w + v_{o\rho}$.

(δ) Εφαρμόζοντας τη σχέση $v_{o\rho} = \sqrt{\dfrac{mg\,(\sin\phi - \mu\cos\phi)}{\lambda}}$ για του δύο σκιέρ μαζί, δηλ. με $m \to 2m$ και $\lambda \to \lambda'$ βρίσκουμε $\dfrac{v'_{o\rho}}{v_{o\rho}} = \sqrt{2\dfrac{\lambda'}{\lambda}}$. 'ρα πρέπει $\lambda' = \lambda$, δηλ. $S' = S$. Επομένως οι σκιέρ κατεβαίνουν αγκαλιασμένοι, ο ένας ακριβώς πίσω από τον άλλο.

[1] Χρησιμοποιώντας την έκφραση της $V(x)$ προκύπτει $F'(x) = -V''(\pm 1) = -8/3$ και $T = 2\pi\sqrt{m/k} = \pi\sqrt{3/2} = 3.85$.

[2] Χρησιμοποιώντας την έκφραση της $V(x)$ προκύπτει $x_{1,2} = \pm\sqrt{4 + 3\sqrt{2}} = \pm 2.87$.

$\boxed{3}$:

$L = m\varpi v_\phi = m\varpi\sqrt{GM/\varpi} = m\sqrt{GM\varpi}$
$\dot{L} = -\lambda \Leftrightarrow L = L_0 - \lambda t$, με $L_0 = m\sqrt{GM\varpi_0}$.
Συνδυάζοντας τις προηγούμενες $m\sqrt{GM\varpi} = L_0 - \lambda t \Leftrightarrow$
$\varpi = \dfrac{(L_0-\lambda t)^2}{GMm^2}$
$\dot{\phi} = v_\phi/\varpi = \sqrt{GM/\varpi^3} = G^2M^2m^3(L_0-\lambda t)^{-3} \Leftrightarrow$
$\int_0^\phi d\phi = G^2M^2m^3\int_0^t (L_0-\lambda t)^{-3}\,dt \Leftrightarrow$
$\phi = \dfrac{G^2M^2m^3}{2\lambda}\left[\dfrac{1}{(L_0-\lambda t)^2} - \dfrac{1}{L_0^2}\right]$
Τροχιά $\phi = \dfrac{GMm}{2\lambda}\left(\dfrac{1}{\varpi} - \dfrac{1}{\varpi_0}\right)$

$\boxed{4}$:

Α′ τρόπος:
Έστω σύστημα $Oxyz$ που περιστρέφεται μαζί με τη γη, με O στο κέντρο της γης, άξονα z πάνω στο πρώτο τούνελ από νότιο προς βόρειο πόλο και άξονα x πάνω στο δεύτερο τούνελ.

(α) $\underbrace{\vec{a}_\sigma}_{\ddot{z}\hat{z}} = \underbrace{\Sigma\vec{F}/m}_{-(g_0/R)z\hat{z}} - \underbrace{\vec{a}_0}_{0} - \vec{\omega}\times\Big(\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{r}}_{0}\Big) - 2\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma}_{0} - \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{0}\times\vec{r} \Leftrightarrow \ddot{z} + \dfrac{g_0}{R}z = 0$

Ο χρόνος μιας περιόδου $2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{6.4\times10^6}{9.8}}$ s $=$ 5070 s $= 84.5$ λεπτά
(β) $\vec{r} = x\hat{x}$, $\vec{v}_\sigma = \dot{x}\hat{x}$, $\vec{a}_\sigma = \ddot{x}\hat{x}$, $\vec{a}_0 = 0$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$, $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega^2 x\hat{x}$, $-2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma = -2\omega\hat{z}\times\dot{x}\hat{x} = -2\omega\dot{x}\hat{y}$, $\Sigma\vec{F} = -m(g_0/R)x\hat{x} + N\hat{y}$. Η αντίδραση $N\hat{y}$ εξουδετερώνει την Coriolis.
$\ddot{x} + \left(\dfrac{g_0}{R} - \omega^2\right)x = 0$
Είναι $\dfrac{R}{g_0}\omega^2 = \dfrac{6.4\times10^5}{9.8}\left(\dfrac{2\pi}{24\times3600}\right)^2 = 0.003 \ll 1$, οπότε το αποτέλεσμα είναι πρακτικά ίδιο με το αποτέλεσμα του (α).
(γ) Για την κίνηση στο πρώτο τούνελ είναι $N = 0$ άρα η τριβή είναι μηδέν. Επομένως $\ddot{z} + \dfrac{g_0}{R}z = 0 \Leftrightarrow z = R\cos\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right)$. Το σώμα εκτελεί αμείωτη ταλάντωση.
Για την κίνηση στο δεύτερο τούνελ, λόγω της $|\vec{N}| = 2m\omega|\dot{x}|$ υπάρχει τριβή $\vec{T} = -2\mu m\omega|\dot{x}|\dfrac{\vec{v}_\sigma}{|\vec{v}_\sigma|} = -2\mu m\omega\dot{x}\hat{x}$.
'ρα $\ddot{x} = \omega^2 x - \dfrac{g_0}{R}x - 2\mu\omega\dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\mu\omega\dot{x} + \left(\dfrac{g_0}{R} - \omega^2\right)x = 0$.
Λύσεις $e^{\xi t}$ με $\xi^2 + 2\mu\omega\xi + \dfrac{g_0}{R} - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = -\mu\omega \pm i\sqrt{\dfrac{g_0}{R} - \omega^2 - \mu^2\omega^2} \approx -\mu\omega \pm i\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}$. 'ρα η γενική λύση είναι $x = e^{-\mu\omega t}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right)\right]$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $x = R$, $\dot{x} = 0$ βρίσκουμε $x = Re^{-\mu\omega t}\left[\cos\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right) + \dfrac{\mu\omega}{\sqrt{g_0/R}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right)\right]$.
Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και καταλήγει στο κέντρο της γης σε χρόνο $\approx \dfrac{5}{\mu\omega} = \dfrac{5}{0.1\times2\pi}$ μέρες $= 8$ μέρες.
Β′ τρόπος:
Έστω αδρανειακό σύστημα $Ox'y'z$ με O στο κέντρο της γης, άξονα z πάνω στο πρώτο τούνελ από νότιο προς βόρειο πόλο και άξονα x' προς την αρχική θέση του σώματος που πέφτει στο δεύτερο τούνελ.
(α) $\underbrace{\vec{a}}_{\ddot{z}\hat{z}} = \underbrace{\Sigma\vec{F}/m}_{-(g_0/R)z\hat{z}} \Leftrightarrow \ddot{z} + \dfrac{g_0}{R}z = 0$

Ο χρόνος μιας περιόδου $2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{6.4\times10^6}{9.8}}$ s $=$ 5070 s $= 84.5$ λεπτά
(β) Το σώμα κινείται στο ισημερινό επίπεδο ($z = 0$). Οι πολικές συντεταγμένες του είναι $(r\,,\phi = \omega t)$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης. Εκτός το βάρος ασκείται στο σώμα και δύναμη $\vec{N} = N\hat{\phi}$ από τα τοιχώματα του τούνελ, που υποχρεώνει το σώμα να περιστρέφεται μαζί με τη γη. 'ρα (με $\dot{\phi} = \omega$, $\ddot{\phi} = 0$), $\vec{a} = -(g_0/R)r\hat{r} + (N/m)\hat{\phi} \Leftrightarrow (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + 2\dot{r}\omega\hat{\phi} = -(g_0/R)r\hat{r} + (N/m)\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{r} + \left(\dfrac{g_0}{R} - \omega^2\right)r = 0$
Είναι $\dfrac{R}{g_0}\omega^2 = \dfrac{6.4\times10^5}{9.8}\left(\dfrac{2\pi}{24\times3600}\right)^2 = 0.003 \ll 1$, οπότε το αποτέλεσμα είναι πρακτικά ίδιο με το αποτέλεσμα του (α).
(γ) Για την κίνηση στο πρώτο τούνελ είναι $N = 0$ άρα η τριβή είναι μηδέν. Επομένως $\ddot{z} + \dfrac{g_0}{R}z = 0 \Leftrightarrow z = R\cos\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right)$. Το σώμα εκτελεί αμείωτη ταλάντωση.
Για την κίνηση στο δεύτερο τούνελ, λόγω της $\vec{N} = 2m\omega\dot{r}\hat{\phi}$ υπάρχει τριβή $\vec{T} = -2\mu m\omega|\dot{r}|\dfrac{\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|} = -2\mu m\omega\dot{r}\hat{r}$.
'ρα $\ddot{r} = \omega^2 r - \dfrac{g_0}{R}r - 2\mu\omega\dot{r} \Leftrightarrow \ddot{r} + 2\mu\omega\dot{r} + \left(\dfrac{g_0}{R} - \omega^2\right)r = 0$.
Λύσεις $e^{\xi t}$ με $\xi^2 + 2\mu\omega\xi + \dfrac{g_0}{R} - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = -\mu\omega \pm i\sqrt{\dfrac{g_0}{R} - \omega^2 - \mu^2\omega^2} \approx -\mu\omega \pm i\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}$. 'ρα η γενική λύση είναι $r = e^{-\mu\omega t}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right)\right]$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $r = R$, $\dot{r} = 0$ βρίσκουμε $r = Re^{-\mu\omega t}\left[\cos\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right) + \dfrac{\mu\omega}{\sqrt{g_0/R}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{R}}\,t\right)\right]$.
Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και καταλήγει στο κέντρο της γης σε χρόνο $\approx \dfrac{5}{\mu\omega} = \dfrac{5}{0.1\times2\pi}$ μέρες $= 8$ μέρες.