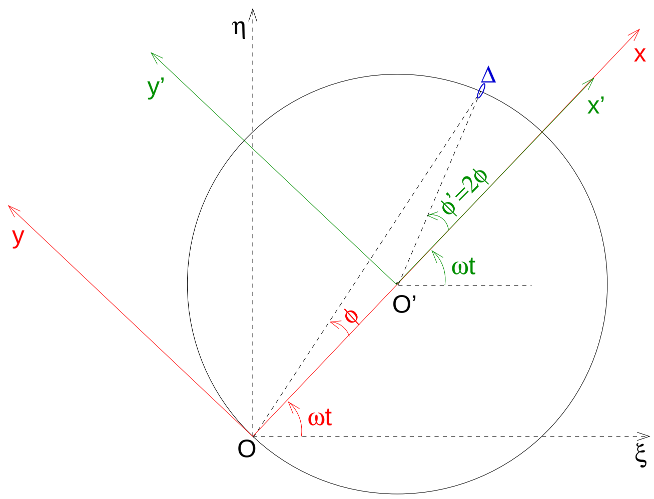
$\boxed{1}$:

Άνθρωπος στέκει πάνω σε ζυγαριά, στον ισημερινό κάποιου πλανήτη ακτίνας R. Η επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι g. Ποια πρέπει να είναι η διάρκεια της ημέρας στον πλανήτη αυτό ώστε η ζυγαριά να δείχνει το μισό βάρος του πραγματικού;
Εφαρμογή: $R = 6400$ km, $g = 20$ m s^{-2}.

Υπόδειξη: Για ένα τρόπο λύσης θα χρειαστεί η $\vec{a} = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$.

$\boxed{2}$:



Κυκλικό οριζόντιο σύρμα ακτίνας $R = 1/2$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1$ γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από σημείο του O. Δαχτυλίδι είναι περασμένο στο σύρμα και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Στο σύστημα αναφοράς $Oxyz$ που περιστρέφεται μαζί με το σύρμα (βλέπε σχήμα) η εξίσωση του κυκλικού σύρματος σε πολικές συντεταγμένες είναι $\varpi = \cos\phi$ (με $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$) και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σύρματος $\vec{\omega} = \hat{z}$.

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού είναι $\ddot{\phi} + \sin\phi\cos\phi = 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» $\dot{\phi}^2 - \dfrac{1}{2}\cos(2\phi) = E$ και σχεδιάστε τις διάφορες καμπύλες φάσης στο επίπεδο $\phi - \dot{\phi}$.

(γ) Αν αρχικά $\phi = 0$ και η απόλυτη ταχύτητα του δαχτυλιδιού είναι $v_a = 0$ δείξτε ότι $E = 1/2$ και βρείτε τα όρια της κίνησης μέσω του ολοκληρώματος ενέργειας. Λύστε την εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι $\sin\phi = -\tanh t$. Δείξτε ότι σε μεγάλους χρόνους $\phi \approx -\dfrac{\pi}{2} + 2e^{-t}$, δηλ. το δαχτυλίδι καταλήγει στο O πρακτικά σε $t \approx 5$.
Βρείτε επίσης σε κάθε θέση ϕ την επιτρόχια και κεντρομόλο επιτάχυνση στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή το O, καθώς και τη δύναμη που ασκεί το σύρμα στο δαχτυλίδι.

(δ) Μελετήστε τις μικρές κινήσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας $\phi = 0$ και αφού δείξετε ότι είναι ταλαντώσεις βρείτε την περίοδό τους.

(ε) Έστω επιλέγουμε να μελετήσουμε την κίνηση στο σύστημα συντεταγμένων $\mathrm{O}'x'y'z'$ με αρχή το κέντρο O' του κυκλικού σύρματος, το οποίο περιστρέφεται μαζί με το σύρμα. Το σύστημα αυτό επίσης περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1$ και η αρχή του O' εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $1/2$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1$. Δείξτε ότι για τις κυλινδρικές συντεταγμένες σε αυτό το σύστημα είναι $\varpi' = 1/2$ και $\phi' = 2\phi$ (όπου ϕ η κυλινδρική συντεταγμένη στο αρχικό σύστημα με αρχή το O). Δείξτε ότι η κίνηση είναι ακριβώς ισοδύναμη με ιδανικό επίπεδο εκκρεμές $\ddot{\phi}' + \sin\phi' = 0$.

Δίνεται $\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r}$ και $\vec{a} = \dfrac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v} - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ και το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\cos\phi} = \ln\sqrt{\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}}$.