$\boxed{1}$:

Σώμα μάζας $m = 1$ εκτελεί σπειροειδή τροχιά $\left\{\varpi = e^{\lambda\phi}\,, z = 0\right\}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες, με $\phi = t$ και $\lambda =$ σταθερά.

(α) Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος και δείξτε ότι η κίνηση είναι συμβατή με το νόμο του Νεύτωνα για δύναμη $\vec{F} = (\lambda^2 - 1)\varpi\hat{\varpi} + 2\lambda\varpi\hat{\phi}$.

(β) Βρείτε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για την κίνηση μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2, με τρεις τρόπους:

(β_1) ολοκληρώνοντας την $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ πάνω στην τροχιά, μεταξύ των γωνιών ϕ_1 και ϕ_2 που αντιστοιχούν στους χρόνους t_1 και t_2,

(β_2) μέσω της ισχύος $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (ολοκληρώνοντας την $dW = Pdt$),

(β_3) από το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας ($dW = dT$).

(γ) Είναι η δύναμη $\vec{F}$ συντηρητική;

Δίδονται οι εκφράσεις της κλίσης και του στροβιλισμού σε κυλινδρικές συντεταγμένες,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \varpi}\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\varpi} + \left(\frac{\partial v_\varpi}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varpi}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial(\varpi v_\phi)}{\partial \varpi} - \frac{\partial v_\varpi}{\partial \phi}\right]\hat{z}.$$

$\boxed{2}$:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται σε ευθεία υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = \left(\dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}\right)\hat{x}$.

Αρχικά βρίσκεται στη θέση ισορροπίας $x = 4$ και έχει ταχύτητα $v_0 < 0$.

(α) Περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές της αρχικής ταχύτητας. Για ποιες τιμές η κίνηση είναι ταλάντωση και για ποιες το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$;

(β) Πόση πρέπει να είναι η v_0 ώστε το σώμα να φτάσει σε σημείο $x = \epsilon$ όπου $0 < \epsilon \ll 1$;

(γ) Βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων για $v_0 \approx 0$.

(δ) Βρείτε τα άκρα της κίνησης και την περίοδο για $v_0 = -1/6$.

Δίνεται $\displaystyle\int_a^b \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(\xi - a)(b - \xi)}} = \frac{\pi(a+b)}{2}\,.$