$\boxed{1}$:

Σώμα μάζας $m$ εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $v_a$. Το σώμα κινείται υπό την επίδραση του (σταθερού) βάρους του $m\vec{g}$ και αντίστασης από τον αέρα, η οποία έχει μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητας, $F_a = \dfrac{m}{g\tau^2}v^2$ (με σταθερό $\tau$).

Στο μάθημα μελετήσαμε την άνοδο του σώματος μέχρι το μέγιστο ύψος και δείξαμε ότι οι σχέσεις ταχύτητας–χρόνου, θέσης–χρόνου και ταχύτητας–θέσης είναι

$$v = g\tau\tan\left(C - \frac{t}{\tau}\right)\ ,\ z = g\tau^2\ln\left[\frac{\cos\left(C - \dfrac{t}{\tau}\right)}{\cos C}\right]\ ,\ v = \sqrt{\left(g^2\tau^2 + v_a^2\right)e^{-2\frac{z}{g\tau^2}} - g^2\tau^2}\ ,$$

όπου $C = \arctan\dfrac{v_a}{g\tau}$.

(α) Δείξτε ότι το σώμα φτάνει στο ανώτερο σημείο σε χρόνο $t_\mu = C\tau$ και η θέση του ανώτερου αυτού σημείου είναι $z_\mu = g\tau^2\ln\sqrt{1 + \left(\dfrac{v_a}{g\tau}\right)^2}$.

(β) Μελετήστε την κάθοδο του σώματος και συγκεκριμένα:

(β$_1$) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση σε κάθε χρόνο.

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int\frac{d\xi}{1-\xi^2} = \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right)d\xi = \ln\sqrt{\left|\frac{1+\xi}{1-\xi}\right|} +$ σταθερά.

(β$_2$) Βρείτε τη σχέση ταχύτητας–θέσης κατευθείαν από το νόμο του Νεύτωνα και δείξτε ότι η ταχύτητα $v_\tau$ του σώματος όταν ξαναπεράσει από το σημείο εκκίνησης $z = 0$ ικανοποιεί την $\dfrac{1}{v_\tau^2} = \dfrac{1}{g^2\tau^2} + \dfrac{1}{v_a^2}$.

(β$_3$) Αν το σώμα συνεχίσει να κινείται σε μικρότερα $z$, ποια είναι η οριακή ταχύτητα που αποκτά; Σε πόσο χρόνο και σε ποια θέση την αποκτά;

(γ) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των $v = v(t)$, $z = z(t)$, $v = v(z)$ για όλη την κίνηση.

$\boxed{2}$:

Λόγω της αντίστασης του αέρα ένας αλεξιπτωτιστής αποκτά οριακή ταχύτητα $V$ σε συνθήκες άπνοιας. Ποια η οριακή ταχύτητά του αν φυσάει οριζόντιος άνεμος με ταχύτητα $U$;