

1: Θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση της Coriolis δύναμης στις βολές από σημείο της γης με γεωγραφικό πλάτος λ . Για το σκοπό αυτό πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\vec{a}_\sigma = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma$ όπου \vec{g} η επιτάχυνση βαρύτητας - την οποία θεωρούμε σταθερή, μέτρου 9.8 m s^{-2} και με φορά προς το κέντρο της γης - και $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης. Η αρχική ταχύτητα έχει μέτρο V και συνιστώσες $V \sin \beta$ προς τα πάνω, $V \cos \beta \cos \gamma$ προς νότο και $V \cos \beta \sin \gamma$ προς ανατολάς. Λύστε το πρόβλημα προσεγγιστικά ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

(α) Αφού επιλέξετε σύστημα αξόνων $Oxyz$ με φορά του άξονα z προς τα πάνω, του άξονα x προς νότο και του άξονα y προς ανατολάς, βρείτε τη μηδενικής τάξης λύση $\vec{r}_g(t) = x_g(t)\hat{x} + y_g(t)\hat{y} + z_g(t)\hat{z}$ η οποία αντιστοιχεί σε μηδενική περιστροφή και την αντίστοιχη ταχύτητα $\vec{v}_g(t)$.

(β) Η λύση κρατώντας τις πρώτες διορθώσεις (ανάλογες του ω) έχει τη μορφή $\vec{r}(t) = \vec{r}_g(t) + \vec{r}_c(t)$. Δείξτε ότι η $\vec{r}_c(t)$ ικανοποιεί την $\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_g$ και αφού την αναλύσετε στο σύστημα $Oxyz$ λύστε την για να βρείτε τις εκφράσεις των $x_c(t)$, $y_c(t)$, $z_c(t)$.

(γ) Υπολογίστε τις αποκλίσεις $x_c(T)$, $y_c(T)$ όταν το σώμα πέφτει ξανά στο έδαφος (η συνθήκη για την πτώση στο έδαφος είναι $z(T) = 0$ για $|\vec{r}|$ πολύ μικρότερο από την ακτίνα της γης, κάτι που είναι συνεπές με την υπόθεση σταθερού \vec{g}). Μας ενδιαφέρουν οι πρώτες διορθώσεις (ανάλογες του ω), οπότε ο χρόνος T θα υπολογιστεί από $z_g(T) = 0$.

(δ) Εφαρμόστε για κατακόρυφη βολή $\beta = \pi/2$. Σε ποιο σημείο πέφτει το σώμα;

(ε) Εφαρμόστε για πλάγια βολή πυροβόλου με $\beta = \pi/4$, προς ανατολάς ($\gamma = \pi/2$), από τόπο με $\lambda = \pi/4$, με αρχική ταχύτητα βλήματος $V = 680 \text{ m s}^{-1}$. Βρείτε πόσα μέτρα αποκλίνει το σώμα προς νότο λόγω της περιστροφής της γης.

2: Διαστημόπλοιο κυλινδρικού σχήματος ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω για να δημιουργήσει τεχνητή βαρύτητα. Ένας άνθρωπος που ισορροπεί σε σημείο του «έδαφους» πετά ένα κέρμα προς τα «πάνω» με ταχύτητα v_0 . Τι τροχιά θα ακολουθήσει το κέρμα και σε ποιο σημείο του «έδαφους» θα χτυπήσει; (Αμελήστε τις διαστάσεις του ανθρώπου.) Για ποιες τιμές του λόγου $\frac{v_0}{\omega R}$ το κέρμα θα φτάσει πάλι στον άνθρωπο που το πέταξε (χωρίς να ανακλαστεί στο «έδαφος»);

3: (α) Μελετήστε την μονοδιάστατη κίνηση σώματος του οποίου η θέση $\phi = \phi(t)$ καθορίζεται από την εξίσωση κίνησης $\ddot{\phi} = F(\phi)$, με «δύναμη»

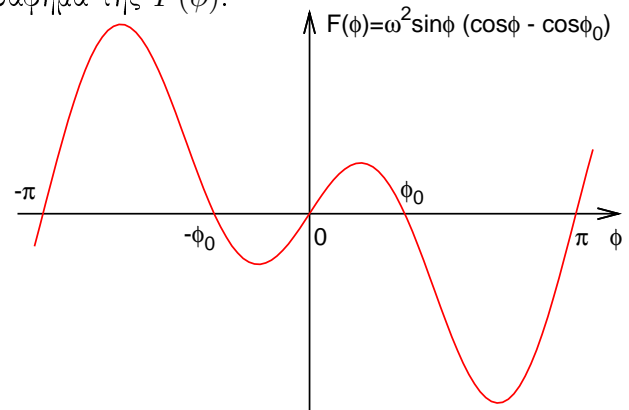
$F(\phi) = \omega^2 \sin \phi \cos \phi - \omega_0^2 \sin \phi$, όπου ω και ω_0 σταθερές με $\omega > \omega_0 > 0$. Συγκεκριμένα:

(α₁) Βρείτε την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια

$V(\phi) = - \int (\omega^2 \cos \phi - \omega_0^2) \sin \phi d\phi$ και γράψτε το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = E$.

(α₂) Σχεδιάστε το γράφημα της $V(\phi)$.

Υπόδειξη: Αφού $\omega > \omega_0$ υπάρχει $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $\cos \phi_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Για τη μελέτη της γραφικής παράστασης της $V(\phi)$ ίσως σας χρησιμεύσει το παρακάτω γράφημα της $F(\phi)$.



(α₃) Για ποια τιμή της ενέργειας και της σταθεράς $\cos \phi_0$ η κίνηση μπορεί να είναι ταλάντωση στο διάστημα $\pi/6 \leq \phi(t) \leq \pi/3$;

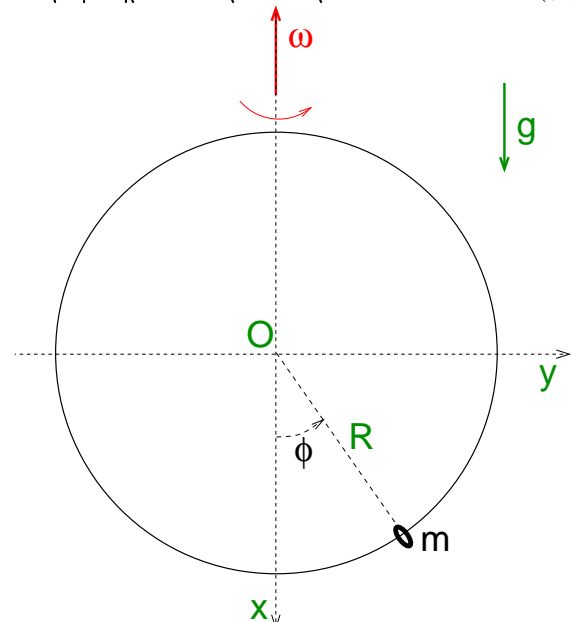
(α₄) Έστω $\cos \phi_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$. Για ποιες τιμές της ενέργειας η κίνηση είναι ταλάντωση στο διάστημα $-\frac{3\pi}{4} \leq \phi(t) \leq \frac{3\pi}{4}$;

(α₅) Για ποιες τιμές της ενέργειας δεν μηδενίζεται ποτέ η $\dot{\phi}(t)$;

(α₆) Ποια τα σημεία ισορροπίας; Είναι ευσταθή ή ασταθή;

(α₇) Ποια η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας;

(α₈) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για το μονοδιάστατο πρόβλημα που μελετάμε, στο επίπεδο $(\phi, \dot{\phi})$.



(β) Έστω μια κατακόρυφη στεφάνη ακτίνας R πε-

ριστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό της, μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο \vec{g} . Ένα δαχτυλίδι μάζας m είναι περασμένο στη στεφάνη και κινείται πάνω της χωρίς τριβές.

(β₁) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού είναι αυτή που δόθηκε στο ερώτημα (α), με ϕ την γωνία μεταξύ \vec{g} και του διανύσματος θέσης \vec{r} του δαχτυλιδιού από το κέντρο της στεφάνης και $\omega_0^2 = g/R$. Δίνεται $\vec{a}_\sigma = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \vec{\omega} \times \vec{r}$. Επίσης δίνεται η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a}_\sigma = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

(β₂) Ποια η ενέργεια E_α του δαχτυλιδιού όπως την μετρά αδρανειακός παρατηρητής; Ποια η σχέση της με το ολοκλήρωμα E του (α) ερωτήματος; Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της E_α και πως συνδέεται με την ισχύ $\vec{N} \cdot \vec{v}_\alpha$ της δύναμης \vec{N} που ασκεί η στεφάνη στο δαχτυλίδι;

Δίνεται $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_0 + \vec{v}_\sigma + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

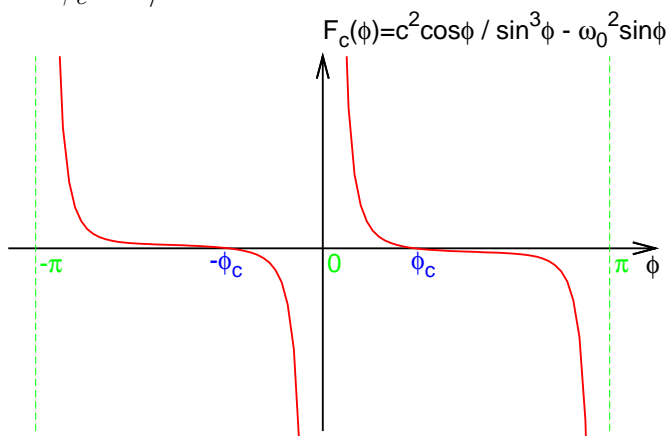
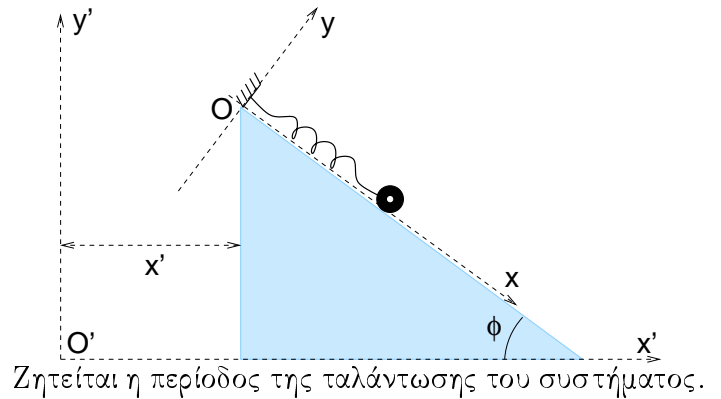
(β₃) Αν από κάποια στιγμή και μετά η στεφάνη αφεθεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό της και θεωρηθεί αβαρής, τι κίνηση θα κάνει το δαχτυλίδι και η στεφάνη;

Συγκεκριμένα, δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα θα υπακούει την $\omega \sin^2 \phi = c$ (όπου c σταθερά) και η γωνία την $\ddot{\phi} = F_c(\phi)$, με $F_c(\phi) = c^2 \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} - \omega_0^2 \sin \phi$.

Βρείτε την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια $V_c(\phi) = - \int F_c(\phi) d\phi$.

Σχεδιάστε το γράφημα της $V_c(\phi)$ και με τη βοήθεια του ολοκληρώματος ενέργειας $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_c(\phi) = E_c$ περιγράψτε την κίνηση του δαχτυλιδιού και της στεφάνης. Ίσως σας χρησιμεύσει το παρακάτω γράφημα της $F_c(\phi)$, όπου ϕ_c η λύση της $F_c(\phi) = 0$ στο διάστημα $0 < \phi_c < \pi/2$.

4]: Σώμα μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στη σφήνα του σχήματος γωνίας κλίσης ϕ , συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς $m\omega_0^2$ και φυσικού μήκους ℓ_0 , το οποίο είναι στηριγμένο στην κορυφή της σφήνας. Η σφήνα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο \vec{g} .



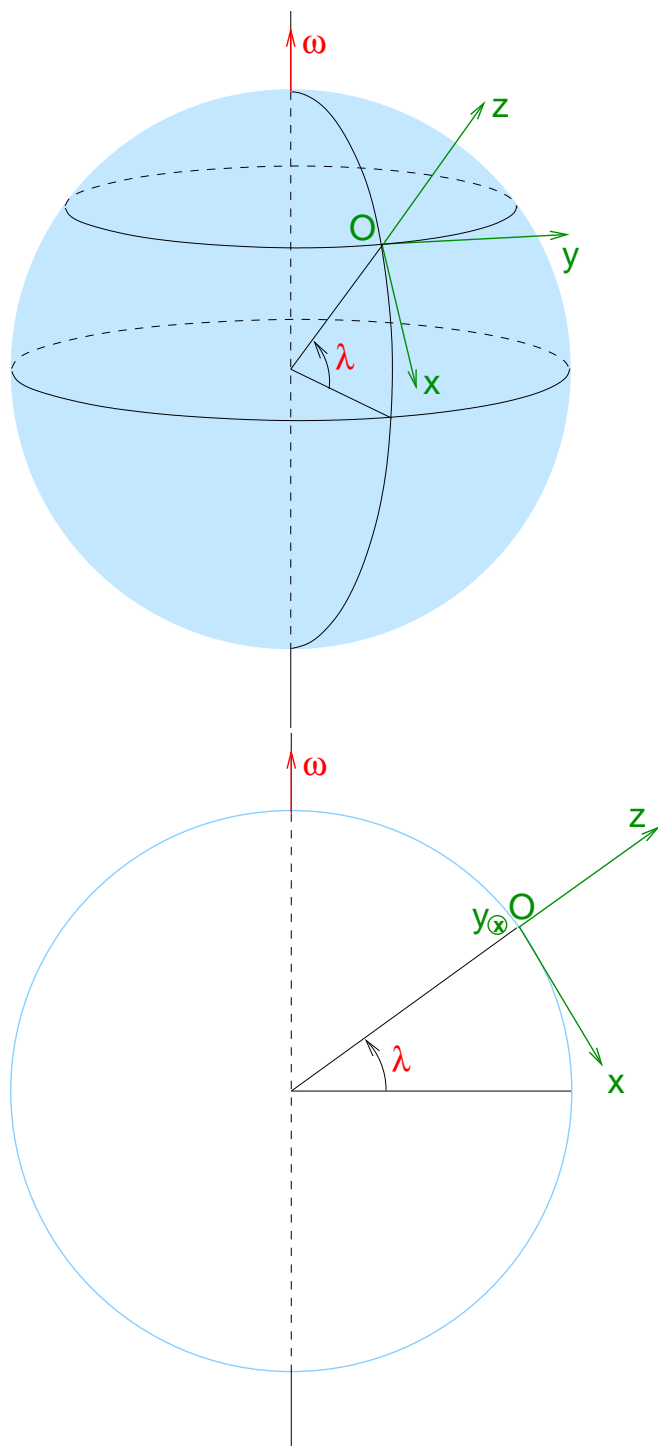
ΛΥΣΕΙΣ:

1: (α) Αγνοώντας την περιστροφή έχουμε $\frac{d^2 \vec{r}_g}{dt^2} = \vec{g}$ $\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_\sigma = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d^2 \vec{r}_g}{dt^2}}_{\vec{g}} + \left(\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \right)_\sigma =$
 $\Leftrightarrow \vec{r}_g = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$ και $\vec{v}_g = \vec{v}_0 + \vec{g} t$.

Θεωρώντας την αρχή του συστήματος O στην αρχική θέση του σώματος στο σύστημα $Oxyz$ είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{gx} = v_{0x} \\ v_{gy} = v_{0y} \\ v_{zg} = v_{0z} - gt \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} x_g = v_{0x} t \\ y_g = v_{0y} t \\ z_g = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right\}$$

(β) Θέτοντας $\vec{r} = \vec{r}_g + \vec{r}_c = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{r}_c$ και $\vec{v} = \vec{v}_g + \vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{g} t + \vec{v}_c$ με τα \vec{r}_c και \vec{v}_c να είναι πρώτης τάξης όροι (ανάλογοι του $\vec{\omega}$) η εξίσωση κίνησης δίνει



$$\vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_g \underbrace{- 2\vec{\omega} \times \vec{v}_c}_{\text{2ης τάξης}} \Leftrightarrow \left(\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \right)_\sigma = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_g.$$

Με $\vec{\omega} = \omega \sin \lambda \hat{z} - \omega \cos \lambda \hat{x}$ είναι $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_g =$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2\omega \cos \lambda & 0 & -2\omega \sin \lambda \\ v_{0x} & v_{0y} & v_{0z} - gt \end{vmatrix} \text{ και άρα οι συνιστώ-}$$

σες της εξίσωσης κίνησης στους άξονες $Oxyz$ είναι

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = 2v_{0y}\omega \sin \lambda \\ \ddot{y}_c = 2(gt - v_{0z})\omega \cos \lambda - 2v_{0x}\omega \sin \lambda \\ \ddot{z}_c = 2v_{0y}\omega \cos \lambda \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $\vec{r}_c|_{t=0} = 0$, $\vec{v}_c|_{t=0} = 0$ το σύστημα ολοκληρώνεται άμεσα

$$\begin{cases} \dot{x}_c = 2v_{0y}\omega t \sin \lambda \\ \dot{y}_c = \omega g t^2 \cos \lambda - 2(v_{0z} \cos \lambda + v_{0x} \sin \lambda) \omega t \\ \dot{z}_c = 2v_{0y}\omega t \cos \lambda \\ x_c = v_{0y}\omega t^2 \sin \lambda \\ y_c = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda - (v_{0z} \cos \lambda + v_{0x} \sin \lambda) \omega t^2 \\ z_c = v_{0y}\omega t^2 \cos \lambda \end{cases}$$

(γ) $z_g(T) = 0 \Leftrightarrow T = \frac{2v_{0z}}{g}$, οπότε

$$\begin{cases} x_c(T) = v_{0y}\omega \left(\frac{2v_{0z}}{g} \right)^2 \sin \lambda \\ y_c(T) = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2v_{0z}}{g} \right)^3 \cos \lambda \\ \quad - (v_{0z} \cos \lambda + v_{0x} \sin \lambda) \omega \left(\frac{2v_{0z}}{g} \right)^2 \end{cases}$$

όπου $v_{0z} = V \sin \beta$, $v_{0x} = V \cos \beta \cos \gamma$ και $v_{0y} = V \cos \beta \sin \gamma$.

Για $\beta \neq \pi/2$ μπορούμε να γράψουμε τις αποκλίσεις προς το βεληνικές $R = \sqrt{x_g(T)^2 + y_g(T)^2} =$

$$VT \cos \beta = 2 \frac{V^2}{g} \sin \beta \cos \beta:$$

$$\begin{cases} \frac{x_c(T)}{R} = 2 \frac{\omega V}{g} \sin \beta \sin \gamma \sin \lambda \\ \frac{y_c(T)}{R} = -2 \frac{\omega V}{g} \sin \beta \left(\frac{\tan \beta \cos \lambda}{3} + \cos \gamma \sin \lambda \right) \end{cases}$$

(δ) Για κατακόρυφη βολή $\beta = \pi/2$ είναι $x_c(T) = 0$,

$$y_c(T) = -\frac{4\omega V^3 \cos \lambda}{3g^2}, \text{ δηλ το σώμα πέφτει σε απόσταση } \frac{4\omega V^3 \cos \lambda}{3g^2} \text{ δυτικά του σημείου από το οποίο ξεκίνησε.}$$

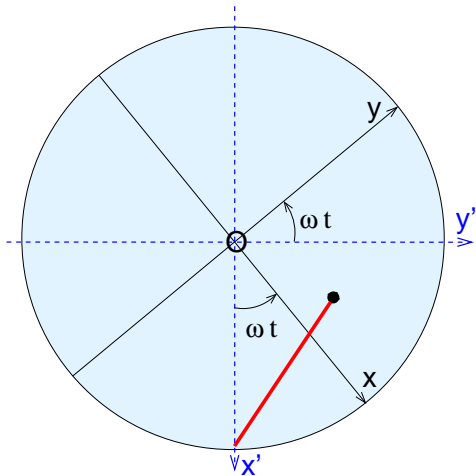
(ε) Βεληνικές $R = \frac{680^2}{9.8} \text{ m} = 47184 \text{ m}.$

$$2 \frac{\omega V}{g} = 0.01 \text{ διότι } \omega = \frac{2\pi}{24 \text{ ώρες}}.$$

$$\frac{x_c(T)}{R} = 5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow x_c(T) = 236 \text{ m}.$$

4η εργασία Μηχανικής I (2010-2011)

2]: Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Ox'y'z'$ του σχήματος, στο οποίο η αρχική θέση του ανθρώπου είναι $\{x' = R, y' = 0\}$, η τροχιά είναι ευθύγραμμη και ομαλή με ταχύτητα $\vec{v}_a = \underbrace{\vec{v}_O}_0 + \underbrace{\vec{v}_\sigma}_{-v_0\hat{x}'} + \underbrace{\vec{\omega}}_{\omega\hat{z}'} \times \underbrace{\vec{r}_0}_{R\hat{x}'} = -v_0\hat{x}' + \omega R\hat{y}'$, όπως την υπολογίζουμε την αρχική στιγμή που ο άνθρωπος πετά το κέρμα.



Επομένως σε κάθε χρόνο t είναι $\vec{r} = R\hat{x}' + (-v_0\hat{x}' + \omega R\hat{y}')t \Leftrightarrow \vec{r} = (R - v_0t)\hat{x}' + R\omega t\hat{y}'$ ①

Αν θεωρήσουμε το περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς Oxy του οποίου οι άξονες κινούνται μαζί με το διαστημόπλοιο, μπορούμε να εκφράσουμε τα μοναδιαία \hat{x}' και \hat{y}' συναρτήσει των μοναδιαίων του περιστρεφόμενου συστήματος \hat{x} και \hat{y} :

$$\hat{x}' = (\hat{x}' \cdot \hat{x})\hat{x} + (\hat{x}' \cdot \hat{y})\hat{y} = \cos(\omega t)\hat{x} - \sin(\omega t)\hat{y},$$

$$\hat{y}' = (\hat{y}' \cdot \hat{x})\hat{x} + (\hat{y}' \cdot \hat{y})\hat{y} = \sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}.$$

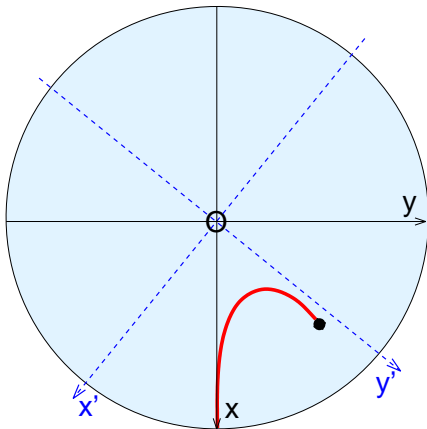
Αντικαθιστώντας στην ① $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ με

$$x = (R - v_0t)\cos(\omega t) + R\omega t\sin(\omega t),$$

$$y = -(R - v_0t)\sin(\omega t) + R\omega t\cos(\omega t).$$

Αυτή είναι η παραμετρική γραφή της τροχιάς όπως τη βλέπει ο περιστρεφόμενος παρατηρητής.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν γράψουμε και λύσουμε την εξίσωση κίνησης στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς με άξονες ακίνητους ως προς το διαστημόπλοιο.



Στο σύστημα αυτό είναι

$$\vec{a}_\sigma = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}, \text{ με } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}, \vec{v}_\sigma = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}, \vec{a}_\sigma = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}, \Sigma \vec{F} = 0,$$

$$\vec{a}_0 = 0, -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \vec{r} = \omega^2 (x\hat{x} + y\hat{y}) \text{ (διότι } \vec{\omega} = \omega\hat{z}), -2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma = -2\omega\hat{z} \times (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) = -2\omega\dot{x}\hat{y} + 2\omega\dot{y}\hat{x} \text{ και } \dot{\vec{\omega}} = 0. \text{ Μετά την αντικατάσταση προκύπτει το σύστημα } \begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)\cos(\omega t) + (C_3 + C_4t)\sin(\omega t) \\ y = -(C_1 + C_2t)\sin(\omega t) + (C_3 + C_4t)\cos(\omega t) \end{cases}$$

Ένας τρόπος να βρεθεί αυτή η λύση είναι να παρατηρήσουμε ότι ορίζοντας τη μιγαδική συνάρτηση $\zeta = x + iy$ μπορούμε να γράψουμε το σύστημα σαν $\dot{\zeta} + 2i\omega\zeta - \omega^2\zeta = 0$.

Αυτή η γραμμική, ομογενής εξίσωση με σταθερούς συντελεστές δέχεται εκθετικές λύσεις $e^{\xi t}$. Η αντικατάσταση οδηγεί στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\xi^2 + 2i\omega\xi - \omega^2 = 0$ με διπλή λύση την $\xi = -i\omega$. Επομένως η γενική λύση είναι $\zeta = (\zeta_0 + \zeta_1 t)e^{-i\omega t}$ όπου ζ_0 και ζ_1 είναι μιγαδικές σταθερές ολοκλήρωσης. Με $\zeta_0 = C_1 + iC_3$ και $\zeta_1 = C_2 + iC_4$ καταλήγουμε στη λύση

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)\cos(\omega t) + (C_3 + C_4t)\sin(\omega t) \\ y = -(C_1 + C_2t)\sin(\omega t) + (C_3 + C_4t)\cos(\omega t) \end{cases}$$

Ένας άλλος τρόπος να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y \end{cases}$ είναι να το γράψουμε σαν

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\omega \\ 2\omega & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Αυτή δέχεται λύσεις $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} e^{\xi t}$.

Η αντικατάσταση δίνει

$$\begin{pmatrix} \xi^2 - \omega^2 & -2\omega\xi \\ 2\omega\xi & \xi^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = 0.$$

Για να είναι η λύση μη μηδενική πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \xi^2 - \omega^2 & -2\omega\xi \\ 2\omega\xi & \xi^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$(\xi - i\omega)^2 (\xi + i\omega)^2 = 0. \text{ Για } \xi = \pm i\omega \text{ είναι } \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \mp 2\omega^2 \\ \pm 2\omega & -2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow C_y = \pm iC_x, \text{ οπότε}$$

τι οι λύσεις είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} e^{\pm i\omega t}$. Επειδή προέκυψαν

διπλές ρίζες, λύσεις είναι και οι $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} t e^{\pm i\omega t}$. Έτσι προκύπτουν τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις των οποίων η επαλληλία δίνει την γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (D_1 + D_2t) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) + i\cos(\omega t) \end{pmatrix} + (D_3 + D_4t) \begin{pmatrix} \sin(\omega t) + i\cos(\omega t) \\ \cos(\omega t) - i\sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $D_1 = \frac{C_1 - iC_3}{2}$, $D_2 = \frac{C_2 - iC_4}{2}$, $D_3 = \frac{C_3 - iC_1}{2}$, $D_4 = \frac{C_4 - iC_2}{2}$, καταλήγουμε στην ίδια ακριβώς λύση με την προηγούμενη μέθοδο.

Έχοντας βρει την γενική λύση με οποιοδήποτε τρόπο, μένει να προσδιορίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = R$, $y|_{t=0} = 0$, $\dot{x}|_{t=0} = -v_0$, $\dot{y}|_{t=0} = 0$ βρίσκουμε $C_1 = R$, $C_2 = -v_0$, $C_3 = 0$, $C_4 = \omega R$, οπότε $x = (R - v_0 t) \cos(\omega t) + R \omega t \sin(\omega t)$, $y = -(R - v_0 t) \sin(\omega t) + R \omega t \cos(\omega t)$.

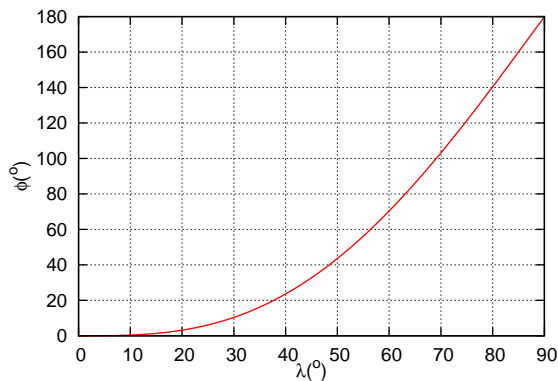
Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που βρέθηκε μελετώντας την κίνηση στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Το κέρμα θα χτυπήσει το «έδαφος», όταν $r^2 = R^2 \Leftrightarrow (R - v_0 t)^2 + (R \omega t)^2 = R^2 \xrightarrow{t > 0} t = \frac{2v_0 R}{v_0^2 + \omega^2 R^2}$.

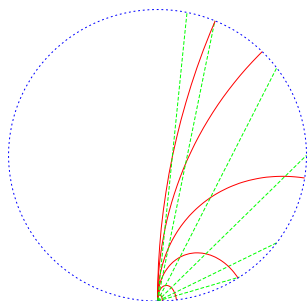
Η έκφραση απλουστεύεται αν ορίσουμε το λόγο $\frac{v_0}{\omega R} = \tan \lambda$, όπου $\lambda \in (0, \pi/2)$. Έτσι βρίσκουμε ότι το κέρμα θα φτάσει ξανά στο «έδαφος» όταν $\omega t = \sin(2\lambda)$. Στο χρόνο αυτό η θέση προκύπτει να είναι

$\frac{x}{R} = \cos[2\lambda - \sin(2\lambda)]$, $\frac{y}{R} = \sin[2\lambda - \sin(2\lambda)]$, δηλ. η γωνία ϕ των πολικών συντεταγμένων του σημείου όπου το κέρμα βρίσκεται το «έδαφος» είναι το $\phi = 2\lambda - \sin(2\lambda)$. Η ϕ σαν συνάρτηση του λ είναι

αύξουσα, αφού $\frac{d\phi}{d\lambda} = 2[1 - \cos(2\lambda)] > 0$, οπότε για $0 < \lambda < \pi/2$ είναι $0 < \phi < \pi$. Επομένως, το σώμα δεν θα φτάσει στον άνθρωπο (δηλ. στη θέση $\phi = 0$) ανεξάρτητα από την τιμή της ταχύτητας v_0 .



Το παραπάνω γράφημα δείχνει την $\phi(\lambda)$. Από αυτό μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα που χρειάζεται για να πέσει το κέρμα σε συγκεκριμένο σημείο. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να πέσει στις 90° (δηλ. στο σημείο $x = 0, y = R$), βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $\lambda = 66^\circ$, οπότε $\frac{v_0}{\omega R} = \tan 66^\circ = 2.25$.



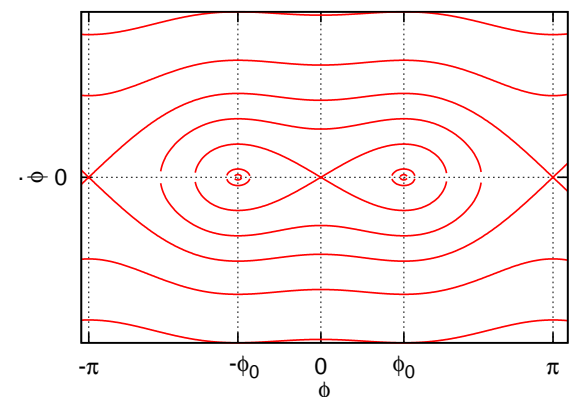
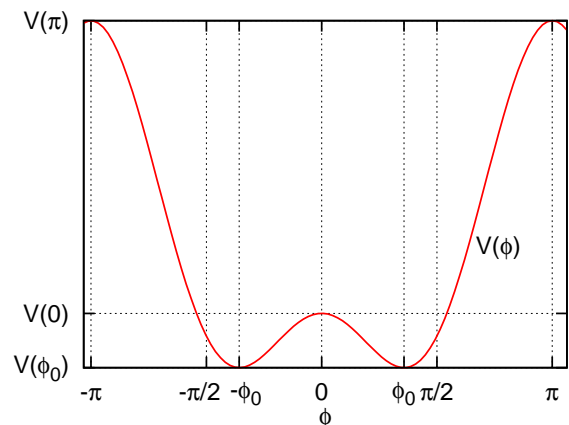
Το τελευταίο σχήμα δείχνει κάποιες τροχιές (για $\frac{v_0}{\omega R} = 0.3, 0.5, 1, 2, 5, 10$) όπως τις βλέπει ο περιστρεφόμενος (κόκκινο) και ο αδρανειακός (πράσινο) παρατηρητές.

3: $(\alpha_1) V(\phi) = \int (\omega^2 \cos \phi - \omega_0^2) d \cos \phi = \frac{\omega^2}{2} \cos^2 \phi - \omega_0^2 \cos \phi$, όπου μηδενίσαμε την αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης.

Το ολοκλήρωμα ενέργειας γράφεται

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \underbrace{\frac{\omega^2}{2} \cos^2 \phi - \omega_0^2 \cos \phi}_{V(\phi)} = E.$$

(α_2) Το δεδομένο γράφημα της $F(\phi) = -V'(\phi)$, το οποίο ισχύει αν $\omega > \omega_0$ οπότε $\exists \phi_0 \in (0, \pi/2) : \cos \phi_0 = \omega_0^2 / \omega^2$, μας δείχνει που η $V(\phi)$ είναι αύξουσα (όπου $F(\phi) < 0$), που είναι φθίνουσα (όπου $F(\phi) > 0$) και που έχει ακρότατα (όπου $F(\phi) = 0$). Επίσης μπορούμε να καταλάβουμε το αν τα ακρότατα είναι ελάχιστα ή μέγιστα από το πρόσημο της $V'(\phi)$ πριν και μετά το σημείο όπου $V'(\phi) = 0$. Χαρακτηριστικές τιμές $V(\phi_0) = -\frac{1}{2} \omega^2 \cos^2 \phi_0$, $V(0) = \omega^2 (\frac{1}{2} - \cos \phi_0)$, $V(\pi) = \omega^2 (\frac{1}{2} + \cos \phi_0)$, με $V(\phi_0) < V(0) < V(\pi)$. Καταλήγουμε στο ακόλουθο γράφημα της $V(\phi)$.



Στο προηγούμενο γράφημα φαίνονται οι καμπύλες φάσης, δηλ. η σχέση μεταξύ $\dot{\phi}$ και ϕ , όπως προκύπτει από το ολοκλήρωμα ενέργειας. Το διάγραμμα ζητείται στο ερώτημα (α_8) .

(α₃) Πρέπει $V(\pi/6) = V(\pi/3) = E$ από τις οποίες προκύπτει $\cos \phi_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ και $E = -\frac{\sqrt{3}}{8}\omega^2$.

(α₄) $E = V(\pm 3\pi/4) = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\omega^2$.

(α₅) Για να είναι πάντα $\dot{\phi}^2/2 > 0$ πρέπει $E > V(\phi)$ για κάθε ϕ , δηλ. $E > V_{\max} \Leftrightarrow E > V(\pi) \Leftrightarrow E > \omega^2 \left(\frac{1}{2} + \cos \phi_0\right)$.

(α₆) Σημεία ισορροπίας εκεί όπου $V'(\phi) = 0$, δηλ. στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ τα $\phi = \pm\pi, \pm\phi_0, 0$.

(Η $V(\phi)$ περιοδική με περίοδο 2π , οπότε υπάρχουν τα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας σε κάθε διάστημα $(2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$.)

Τα ελάχιστα είναι ευσταθή, δηλ. τα $\phi = \pm\phi_0$, ενώ τα μέγιστα είναι ασταθή, δηλ. τα $\phi = \pm\pi, 0$.

(α₇) Για $\phi = \pm\phi_0 + q$ με $|q| \ll 1$ είναι $V(\phi) \approx V(\pm\phi_0) + V'(\pm\phi_0)q + \frac{1}{2}V''(\pm\phi_0)q^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 \cos^2 \phi_0 + \frac{1}{2}\omega^2 \sin^2 \phi_0 q^2$ οπότε $F \approx -\omega^2 \sin^2 \phi_0 q$ και η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{q} + \omega^2 \sin^2 \phi_0 q = 0$ με λύση $q = C_1 \sin(\omega \sin \phi_0 t) + C_2 \cos(\omega \sin \phi_0 t)$.

Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega \sin \phi_0}$.

(α₈) Το διάγραμμα φάσης έχει ήδη σχεδιαστεί σε προηγούμενο σχήμα.

(β₁) Σε πολικές στο μη αδρανειακό που περιστρέφεται μαζί με τη στεφάνη: $\vec{r} = R\hat{\omega}$, $\vec{v}_\sigma = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a}_\sigma = -R\dot{\phi}^2\hat{\omega} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a}_0 = 0$, $\Sigma\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$, $\vec{g} = g\hat{x}$ και $\vec{\omega} = -\omega\hat{x}$, όπου $\hat{x} = (\hat{x} \cdot \hat{\omega})\hat{\omega} + (\hat{x} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \cos \phi \hat{\omega} - \sin \phi \hat{\phi}$, $\vec{N} = N_\omega\hat{\omega} + N_z\hat{z}$, $\vec{\omega} = 0$, $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma = 2\omega R\dot{\phi}\hat{x} \times \hat{\phi} = 2\omega R\dot{\phi} \cos \phi \hat{z}$, $\vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega R\hat{x} \times \hat{\omega} = -\omega R \sin \phi \hat{z}$, $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 R \sin \phi \hat{x} \times \hat{z} = \omega^2 R \sin \phi \hat{y}$, όπου $\hat{y} = (\hat{y} \cdot \hat{\omega})\hat{\omega} + (\hat{y} \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \sin \phi \hat{\omega} + \cos \phi \hat{\phi}$.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην $\vec{a}_\sigma = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$, προκύπτει

$$\begin{cases} -R\dot{\phi}^2 = g \cos \phi + \frac{N_\omega}{m} + \omega^2 R \sin^2 \phi & \textcircled{1} \\ R\ddot{\phi} = -g \sin \phi + \omega^2 R \sin \phi \cos \phi & \textcircled{2} \\ 0 = \frac{N_z}{m} + 2\omega R\dot{\phi} \cos \phi & \textcircled{3} \end{cases}$$

② $\leadsto \ddot{\phi} = \omega^2 \sin \phi \cos \phi - \omega_0^2 \sin \phi$, όπου $\omega_0^2 = g/R$, δηλ. η εξίσωση $\ddot{\phi} = F(\phi)$ του ερωτήματος (α).

(β₂) Η δυναμική ενέργεια του δαχτυλιδιού είναι $-mgR \cos \phi$, όπου θεωρήσαμε μηδενική δυναμική ενέργεια στο κέντρο της στεφάνης.

Η ταχύτητα του δαχτυλιδιού όπως την μετρά αδρανειακός παρατηρητής είναι $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_0 + \vec{v}_\sigma + \vec{\omega} \times \vec{r}$ με $\vec{v}_0 = 0$, δηλ. $\vec{v}_\alpha = R\dot{\phi}\hat{\phi} - \omega R \sin \phi \hat{z}$. Άρα $E_\alpha = \frac{mv_\alpha^2}{2} - mgR \cos \phi = mR^2 \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\omega^2}{2} \sin^2 \phi - \omega_0^2 \cos \phi \right)$.

Αντικαθιστώντας $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = E - V(\phi)$ προκύπτει

$$E_\alpha = mR^2 E + \frac{1}{2}mR^2 \omega^2 \sin^2 \phi - \frac{1}{2}mR^2 \omega^2 \cos^2 \phi.$$

Η διαφορά $E_\alpha - mR^2 E$ οφείλεται σε δύο λόγους: Ο ένας είναι η διαφορά ταχύτητας στα δύο συστήματα, αδρανειακό και περιστρεφόμενο. Λόγω αυτής της διαφοράς υπάρχει ο όρος $\frac{1}{2}mR^2 \omega^2 \sin^2 \phi$ στην $E_\alpha - mR^2 E$. Ο δεύτερος λόγος είναι η ύπαρξη της φυγόκεντρου όταν μελετούμε την κίνηση στο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η οποία προσθέτει ένα όρο στη δυναμική ενέργεια. Σε αυτήν οφείλεται ο όρος $-\frac{1}{2}mR^2 \omega^2 \cos^2 \phi$ στην $E_\alpha - mR^2 E$.

Ο όρος E είναι σταθερός, αλλά η ενέργεια E_α δεν παραμένει σταθερή, αφού αυτός που περιστρέφει τη στεφάνη και φροντίζει αυτή, όπως και το δαχτυλίδι, να έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από τον x άξονα, δίνει (ή παίρνει) ενέργεια στο δαχτυλίδι μέσω του έργου της δύναμης \vec{N} .

Ο ρυθμός μεταβολής της E_α είναι

$$\frac{dE_\alpha}{dt} = 2mR^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi \dot{\phi} \text{ και περιμένουμε να εί-$$

ναι ίσος με την ισχύ της δύναμης \vec{N} . Πράγματι είναι $\vec{N} \cdot \vec{v}_\alpha = (N_\omega \hat{\omega} + N_z \hat{z}) \cdot (R\dot{\phi} \hat{\phi} - \omega R \sin \phi \hat{z}) = -N_z \omega R \sin \phi$ και χρησιμοποιώντας την ③ $\leadsto N_z = -2m\omega R\dot{\phi} \cos \phi$, βρίσκουμε $\vec{N} \cdot \vec{v}_\alpha = \frac{dE_\alpha}{dt}$.

(β₃) Σε σχέση με πριν πρέπει να προσθέσουμε την υποθετική δύναμη $-m\vec{\omega} \times \vec{r} = m\dot{\omega} R \hat{x} \times \hat{\omega} = m\dot{\omega} R \sin \phi \hat{z}$ και να αφαιρέσουμε τη δύναμη $N_z \hat{z}$ (αφού η στεφάνη είναι αβαρής η κινητική της ενέργεια είναι μηδέν, οπότε και η ισχύς της δύναμης $-\vec{N}$ που ασκεί το δαχτυλίδι στη στεφάνη είναι μηδέν, κάτι που συνεπάγεται $N_z \omega R \sin \phi = 0 \Rightarrow N_z = 0$). Άρα σε σχέση με πριν αλλάζει μόνο η εξίσωση ③, η οποία πρέπει να αντικατασταθεί από την $0 = 2\omega R\dot{\phi} \cos \phi + \dot{\omega} R \sin \phi$ που ολοκληρώνεται: $0 = 2\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \dot{\phi} + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \Leftrightarrow$

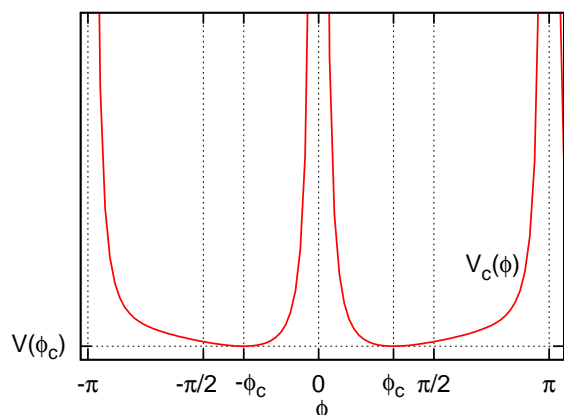
$$0 = \frac{d}{dt} \ln \sin^2 \phi + \frac{d}{dt} \ln |\omega| \Leftrightarrow \omega \sin^2 \phi = c \text{ (όπου } c \text{ σταθερά).}$$

Αν αντικαταστήσουμε την $\omega = c/\sin^2 \phi$ στην ② (η οποία συνεχίζει να ισχύει παρότι τώρα η ω δεν είναι σταθερή) βρίσκουμε την $\ddot{\phi} = F_c(\phi)$ με $F_c(\phi) = c^2 \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} - \omega_0^2 \sin \phi$.

Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι $V_c(\phi) = -\int F_c(\phi) d\phi = -c^2 \int \frac{\cos \phi}{\sin^3 \phi} d\phi + \omega_0^2 \int \sin \phi d\phi = -c^2 \int (\sin \phi)^{-3} d(\sin \phi) - \omega_0^2 \int d(\cos \phi) \Leftrightarrow$

$$V_c(\phi) = \frac{c^2}{2 \sin^2 \phi} - \omega_0^2 \cos \phi.$$

Η $V_c(\phi)$ είναι άρτια και περιοδική, οπότε αρκεί να την μελετήσουμε μόνο στο διάστημα $\phi \in [0, \pi]$. Το δεδομένο γράφημα της $F_c(\phi) = -V'_c(\phi)$, το οποίο ισχύει για $c \neq 0$ (για $c = 0$ η κίνηση ανάγεται στην κίνηση επίπεδου ιδανικού εκκρεμούς), μας δείχνει που η $V_c(\phi)$ είναι αύξουσα (όπου $F_c(\phi) < 0$), που είναι φθίνουσα (όπου $F_c(\phi) > 0$) και που έχει ακρότατα (όπου $F_c(\phi) = 0$). Επίσης μπορούμε να καταλάβουμε το αν τα ακρότατα είναι ελάχιστα ή μέγιστα από το πρόσημο της $V'_c(\phi)$ πριν και μετά το σημείο όπου $V'_c(\phi) = 0$. Χαρακτηριστικές τιμές $V_c(\phi_c) = \frac{\omega_0^2 \cos \phi_c}{2} (\tan^2 \phi_c - 2)$, $V_c(0) = +\infty$, $V_c(\pm\pi) = +\infty$. Καταλήγουμε στο ακόλουθο γράφημα της $V_c(\phi)$.



Από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_c(\phi) = E_c$ προκύπτουν τα όρια κίνησης. Συγκεκριμένα, από τη γραφική λύση της ανισότητας $V_c(\phi) \leq E_c$ προκύπτει ότι η κίνηση γίνεται μεταξύ δύο ακραίων τιμών $\phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}$ (η περιστροφή γύρω από τον άξονα x δεν αλλάζει φορά, αλλάζει όμως γωνιακή ταχύτητα ακολουθώντας την $\omega = c/\sin^2 \phi$).

[4]: Η κίνηση του m μπορεί να μελετηθεί εύκολα στο σύστημα Oxy της σφήνας το οποίο δεν είναι αδρανειακό διότι $\vec{a}_0 \neq 0$.

Η θέση του m είναι $\vec{r} = x\hat{x}$ και ικανοποιεί την $m\ddot{x}\hat{x} = \Sigma \vec{F} - m\vec{a}_0 \Leftrightarrow m\ddot{x}\hat{x} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} - m\vec{a}_0$. Οι πραγματικές δυνάμεις είναι το βάρος $m\vec{g} = (m\vec{g} \cdot \hat{x})\hat{x} + (m\vec{g} \cdot \hat{y})\hat{y} = mg \sin \phi \hat{x} - mg \cos \phi \hat{y}$, η δύναμη από τη σφήνα $\vec{N} = N\hat{y}$ (κάθετη αντίδραση) και η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -m\omega_0^2(x - \ell_0)\hat{x}$. Η επιτάχυνση του O είναι $\vec{a}_0 = \ddot{x}'\hat{x}' = \ddot{x}'(\hat{x}' \cdot \hat{x})\hat{x} +$

$$\ddot{x}'(\hat{x}' \cdot \hat{y})\hat{y} = \ddot{x}' \cos \phi \hat{x} + \ddot{x}' \sin \phi \hat{y}.$$

Αντικαθιστώντας προκύπτουν οι παρακάτω συνιστώσες της εξίσωσης Νεύτωνα

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \phi - m\omega_0^2(x - \ell_0) - m\ddot{x}' \cos \phi & \textcircled{1} \\ 0 = -mg \cos \phi + N - m\ddot{x}' \sin \phi & \textcircled{2} \end{cases}$$

Η κίνηση της σφήνας γίνεται κάτω από την επίδραση του βάρους της $-Mg\hat{y}'$, της κάθετης αντίδρασης από το οριζόντιο επίπεδο $N_M\hat{y}'$ και των αντιδράσεων των δυνάμεων \vec{N} και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$.

Άρα $M\vec{a}_0 = -Mg\hat{y}' + N_M\hat{y}' - N\hat{y} + m\omega_0^2(x - \ell_0)\hat{x}$. Επειδή δεν μας ενδιαφέρει η δύναμη $N_M\hat{y}'$ χρήσιμη είναι μόνο η προβολή της παραπάνω εξίσωσης στη διεύθυνση \hat{x}' :

$$M\ddot{x}' = -N \sin \phi + m\omega_0^2(x - \ell_0) \cos \phi \quad \textcircled{3}$$

Λύνοντας το σύστημα των $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ και $\textcircled{3}$ προκύπτουν

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{M+m}{M+m \sin^2 \phi} [\omega_0^2(x - \ell_0) - g \sin \phi] \\ \ddot{x}' = -\frac{m \cos \phi}{M+m} \ddot{x} \\ N = mg \cos \phi + m\ddot{x}' \sin \phi \end{cases}$$

Από την πρώτη φαίνεται ότι η λύση είναι αρμονική ταλάντωση $x = \ell_0 + \frac{g \sin \phi}{\omega_0^2} + D \sin(\Omega t + C)$, με

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{M+m}{M+m \sin^2 \phi}}.$$

Η περίοδος είναι $\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{M+m \sin^2 \phi}{M+m}}$.