$\boxed{1}$: Στο ανώτερο σημείο μιας συμπαγούς ακίνητης σφαίρας ακτίνας R ισορροπεί στιγμιαία σώμα μάζας m, πολύ μικρών διαστάσεων.

(α) Αγνοώντας την τριβή, αν δώσουμε στο σώμα αμελητέα ώθηση (αρχική ταχύτητα ≈ 0) θα αρχίσει να γλιστράει προς τα κάτω. Σε ποιο σημείο θα χάσει την επαφή του με τη σφαίρα;

(β) Δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα v_0 (όταν βρίσκεται στο ανώτερο σημείο). Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και σφαίρας είναι f να βρεθούν η ταχύτητα και οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα σαν συνάρτηση της θέσης.

Υπόδειξη: Φτιάξτε διαφορική εξίσωση για το τετράγωνο της ταχύτητας $h \equiv v^2$ σαν συνάρτηση της γωνίας θ από την κατακόρυφη θέση και λύστε την.

(γ) Εφαρμογή για $f = 1/\sqrt{2}$. Σε ποιο σημείο το σώμα χάνει την επαφή του με τη σφαίρα; Διερευνήστε αν λόγω της τριβής το σώμα ακινητοποιείται.

$\boxed{2}$: Δύο ίδια σώματα με μάζες $m_A = m_B = 2$ κινούνται μονοδιάστατα κάτω από την επίδραση δυνάμεων $F_A = -\dfrac{dV(x_A)}{dx_A}$ και $F_B = -\dfrac{dV(x_B)}{dx_B}$ αντίστοιχα, όπου $V(x) = x^3 - 3x$.

(α) Το σώμα A στο χρόνο $t = 0$ βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x_A = 0$. Τι κίνηση εκτελεί; Αν είναι περιοδική βρείτε την περίοδό της T και συγκρίνετε με την περίοδο μικρών ταλαντώσεων γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας. Δίνεται $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dx}{\sqrt{3x - x^3}} \approx 3.985$.

(β) Το σώμα B στο χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_B = -2$ με ταχύτητα $\dot{x}_B = v_0 > 0$.

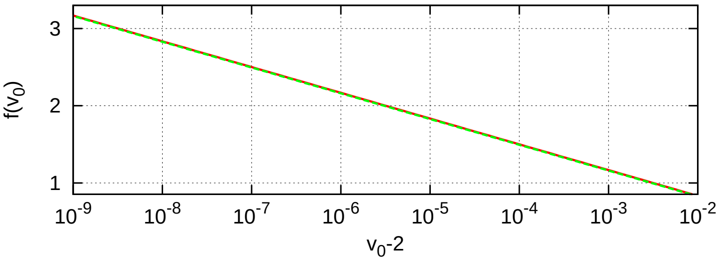
(β_1) Για ποιες τιμές της v_0 δεν θα συγκρουστεί με το A;

(β_2) Για ποιες τιμές της v_0 θα συγκρουστεί με το A στη θέση $x = 0$; Δίνεται στο παρακάτω σχήμα το γράφημα (κόκκινο) της συνάρτησης

$$f(v_0) = \left[\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dx}{\sqrt{3x - x^3}}\right]^{-1} \int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2 + 3x - x^3}}$$

και η προσεγγιστική της έκφραση (πράσινο)

$$f(v_0) \approx \left[\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dx}{\sqrt{3x - x^3}}\right]^{-1} \ln\frac{3}{v_0 - 2}$$
$$\approx 0.160 - 0.145\ln(v_0 - 2).$$



(β_{21}) Αν τα σώματα συγκρουστούν ελαστικά στο $x = 0$ τι κίνηση εκτελούν μετά την κρούση;

(β_{22}) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης που αντιστοιχεί στη δοσμένη δυναμική ενέργεια και δείξτε τις καμπύλες φάσης που αντιστοιχούν στις τροχιές των A και B πριν και μετά την κρούση.

(β_{23}) Αν τα σώματα συγκρουστούν πλαστικά στο $x = 0$ τι κίνηση εκτελεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση; (Στο συσσωμάτωμα ασκείται δύναμη $F_A + F_B = -2\dfrac{dV}{dx}$.)

$\boxed{3}$: Σώμα μάζας 2 kg εκτελεί μονοδιάστατη αρμονική ταλάντωση. Αν αρχικά η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι $x|_{t=0} = 3$ m, $v|_{t=0} = 8$ m s^{-1}, $a|_{t=0} = -12$ m s^{-2} να βρεθεί η θέση σαν συνάρτηση του χρόνου, το πλάτος και η περίοδος της ταλάντωσης. Ποια η δύναμη που ασκείται στο σώμα το χρόνο $t = \pi/6$ s;

$\boxed{4}$: Σώμα με $m = 1$ κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από $V(x) = \sin x$ (όλα στο σύστημα μονάδων mksA).

(α) Ποια η εξίσωση κίνησης;

(β) Ποια τα σημεία ισορροπίας (ευσταθή και ασταθή);

(γ) Ποια η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από κάποιο ευσταθές σημείο ισορροπίας;

(δ) Έστω για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο $x_0 = -11\pi/6$. Δείξτε ότι για να περάσει από το σημείο $x = 0$ πρέπει η αρχική του ταχύτητα να είναι $v_0 > 1$.

$\boxed{5}$: Η θέση σώματος μάζας m είναι

$$\begin{cases} x = x_0 + De^{-t/\tau}\left[\sin(\omega t) + \omega\tau\cos(\omega t)\right] \\ y = y_0 + De^{-t/\tau}\left[\cos(\omega t) - \omega\tau\sin(\omega t)\right] \\ z = z_0 + Ce^{-t/\tau} \end{cases}$$

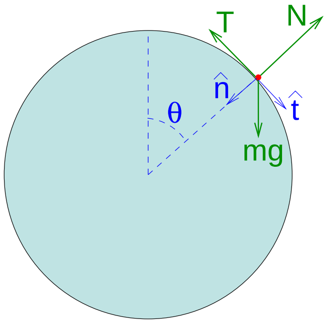
(α) Βρείτε τη δύναμη που του ασκείται αν αυτή εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα, δηλ. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$, και δώστε φυσική σημασία στη δύναμη αυτή.

(β) Αν η δύναμη εξαρτάται μόνο από τη θέση, δηλ. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, βρείτε την έκφρασή της.

$\boxed{6}$: Σώμα μάζας m βρίσκεται σε πεδίο δυνάμεων με $V = a + bx^2$, όπου a, b σταθερές με $b > 0$. Στο σώμα ασκείται και δεύτερη δύναμη $\vec{N}$ (εκτός τη δύναμη από το πεδίο) που το υποχρεώνει να κινείται στην ευθεία $y = x$, $z = 0$. Η δύναμη $\vec{N}$ είναι κάθετη στην ευθεία αυτή. Αφού λύσετε την εξίσωση Νεύτωνα βρείτε τη θέση σα συνάρτηση του χρόνου για τυχούσες αρχικές συνθήκες. Ελέγξτε αν η ενέργεια $T + V$ είναι σταθερή.

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$:



(α) Για $T=0$: $\left\{\begin{array}{l} mg\cos\theta - N = \dfrac{mv^2}{R} \\ 0 + mgR = \dfrac{mv^2}{2} + mgR\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$ $N = mg\,(3\cos\theta - 2)$. Είναι $N>0 \Leftrightarrow \cos\theta > \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$ $\theta < \arccos\dfrac{2}{3}$. Άρα η επαφή χάνεται στη θέση $\theta = \arccos\dfrac{2}{3} = 0.84\text{ rad} = 48°11'23''$.

(β) Για $T\neq 0$: $\left\{\begin{array}{ll} mg\cos\theta - N = \dfrac{mv^2}{R} & ① \\ m\dot v = mg\sin\theta - T & ② \\ T = fN & ③ \end{array}\right.$

Απαλείφοντας τις T και N έχουμε $\dot v = f\dfrac{v^2}{R} + g\,(\sin\theta - f\cos\theta)$.

Με $\dot v = \dfrac{dv}{d\theta}\dot\theta \overset{v=R\dot\theta}{=} \dfrac{v}{R}\dfrac{dv}{d\theta} = \dfrac{1}{2R}\dfrac{dh}{d\theta}$, όπου $h\equiv v^2$, προκύπτει η γραμμική, μη-ομογενής διαφορική εξίσωση $\dfrac{dh}{d\theta} - 2fh = 2gR\,(\sin\theta - f\cos\theta)$.

Η λύση της ομογενούς είναι εκθετική $e^{\xi\theta}$. Αντικαθιστώντας προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\xi - 2f = 0 \Leftrightarrow \xi = 2f$, δηλ. η λύση της ομογενούς είναι $\mathcal{C}e^{2f\theta}$.

Η μερική λύση είναι της μορφής $A\cos\theta + B\sin\theta$. Η αντικατάσταση δίνει[1] $\left\{\begin{array}{l} -A - 2fB = 2gR \\ -2fA + B = -2gRf \end{array}\right\} \Rightarrow$

$A = gR\dfrac{4f^2-2}{4f^2+1}, \quad B = -gR\dfrac{6f}{4f^2+1}$.

Επομένως η γενική λύση είναι

$v^2 = \mathcal{C}e^{2f\theta} + gR\dfrac{(4f^2-2)\cos\theta - 6f\sin\theta}{4f^2+1}$.

Η σταθερά $\mathcal{C}$ βρίσκεται από την αρχική συνθήκη $v|_{\theta=0} = v_0$, οπότε τελικά

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2}{gR}e^{2f\theta} + \frac{(4f^2-2)\left(\cos\theta - e^{2f\theta}\right) - 6f\sin\theta}{4f^2+1}.$$

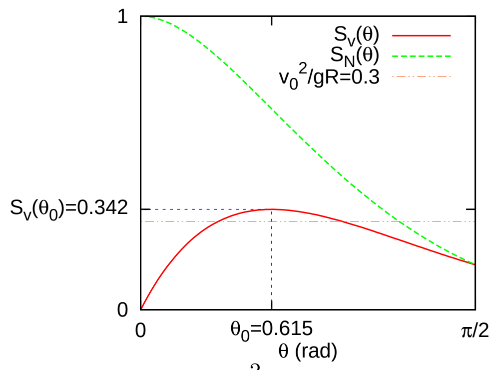
Η τελευταία σχέση οδηγεί στο ολοκλήρωμα της ενέργειας αν $f=0$.

Οι ① και ③ δίνουν τις δυνάμεις N και T.

(γ) Για $f = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι $\dfrac{v^2}{gR} = \dfrac{v_0^2}{gR}e^{\sqrt{2}\,\theta} - \sqrt{2}\,\sin\theta$ και $\dfrac{N}{mg} = \cos\theta + \sqrt{2}\,\sin\theta - \dfrac{v_0^2}{gR}e^{\sqrt{2}\,\theta}$.

Γράφοντας $\dfrac{v^2}{gR}e^{-\sqrt{2}\,\theta} = \dfrac{v_0^2}{gR} - S_v(\theta)$, όπου $S_v(\theta) = \sqrt{2}\,\sin\theta e^{-\sqrt{2}\,\theta}$ και $\dfrac{N}{mg}e^{-\sqrt{2}\,\theta} = S_N(\theta) - \dfrac{v_0^2}{gR}$, όπου $S_N(\theta) = \left(\cos\theta + \sqrt{2}\,\sin\theta\right)e^{-\sqrt{2}\,\theta}$, οι μηδενισμοί των v και N θα προκύψουν από τη μελέτη των συναρτήσεων $S_v(\theta)$ και $S_N(\theta)$ (από τις τομές τους με τη σταθερά $\dfrac{v_0^2}{gR}$).

Η $S_v(\theta)$ έχει μέγιστο στη γωνία $\theta_0 = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.615$ rad, ίσο με $S_v(\theta_0) = 0.342$, ενώ η $S_N(\theta)$ είναι φθίνουσα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα γραφήματα των $S_v(\theta)$ (κόκκινο) και $S_N(\theta)$ (πράσινο).



Για δεδομένη τιμή της $\dfrac{v_0^2}{gR}$, φέροντας την ευθεία $S = \dfrac{v_0^2}{gR}$ παράλληλα στον άξονα των θ, όπως π.χ. η πορτοκαλί ευθεία του σχήματος που αντιστοιχεί σε $\dfrac{v_0^2}{gR} = 0.3$, μπορούμε να δούμε από το διάγραμμα σε ποια περιοχή του θ ισχύουν οι ανισότητες $S_N(\theta) > \dfrac{v_0^2}{gR} \Leftrightarrow N > 0$ και $S_v(\theta) < \dfrac{v_0^2}{gR} \Leftrightarrow v^2 > 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\dfrac{v_0^2}{gR} \geq 1 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{gR}$: Είναι $S_N(\theta=0) \leq \dfrac{v_0^2}{gR} \Leftrightarrow$ $N \leq 0$ οπότε το σώμα χάνει την επαφή του με τη σφαίρα μόλις του δώσουμε την αρχική ταχύτητα v_0.
- $S_v(\theta_0) < \dfrac{v_0^2}{gR} < 1 \Leftrightarrow 0.585\sqrt{gR} < v_0 < \sqrt{gR}$: Η ευθεία $\dfrac{v_0^2}{gR}$ τέμνει την πράσινη καμπύλη σε γωνία θ_N. Σε εκείνο το σημείο χάνεται η επαφή (μέχρι εκείνο το σημείο η ευθεία $\dfrac{v_0^2}{gR}$ είναι κάτω από την πράσινη καμπύλη, δηλ. $\dfrac{v_0^2}{gR} < S_N \Leftrightarrow N > 0$ και επίσης είναι πάνω

[1] Εξισώνουμε τους συντελεστές των $\cos\theta$ και $\sin\theta$ στα δύο μέλη, αφού αυτές οι συναρτήσεις είναι ανεξάρτητες.

από την κόκκινη καμπύλη, δηλ. $\dfrac{v_0^2}{gR} > S_v \Leftrightarrow v^2 > 0$).

- $\dfrac{v_0^2}{gR} = S_v(\theta_0) \Leftrightarrow v_0 = 0.585\sqrt{gR}$: Η ευθεία $\dfrac{v_0^2}{gR}$ τέμνει την κόκκινη καμπύλη στη γωνία θ_0. Σε εκείνο το σημείο το σώμα ακινητοποιείται (μέχρι εκείνο το σημείο η ευθεία $\dfrac{v_0^2}{gR}$ είναι κάτω από την πράσινη καμπύλη, δηλ. $\dfrac{v_0^2}{gR} < S_N \Leftrightarrow N > 0$ και επίσης είναι πάνω από την κόκκινη καμπύλη, δηλ. $\dfrac{v_0^2}{gR} > S_v \Leftrightarrow v^2 > 0$).

Η ευθεία $\dfrac{v_0^2}{gR}$ τέμνει και την κόκκινη καμπύλη σε μεγαλύτερη γωνία, αλλά αυτό είναι αδιάφορο αφού το σώμα δεν κινείται πέρα από την γωνία θ_v.

- $\dfrac{v_0^2}{gR} < S_v(\theta_0) \Leftrightarrow v_0 < 0.585\sqrt{gR}$: Όπως και πριν, η ευθεία $\dfrac{v_0^2}{gR}$ τέμνει την κόκκινη καμπύλη σε γωνία θ_v. Σε εκείνο το σημείο το σώμα ακινητοποιείται.

Η διαφορά των δύο τελευταίων περιπτώσεων, εκτός την τιμής της θ_v, είναι ο χρόνος που διαρκεί η κίνηση. Το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το θ_v δίνει $\dfrac{v^2}{gR} = e^{\sqrt{2}\,\theta}\left[\dfrac{v_0^2}{gR} - S_v(\theta)\right] \approx e^{\sqrt{2}\,\theta_v} S_v'(\theta_v)\,(\theta_v - \theta) + \dfrac{1}{2} e^{\sqrt{2}\,\theta_v}\left[-S_v''(\theta_v) - 2\sqrt{2}S_v'(\theta_v)\right](\theta_v - \theta)^2$. Όταν $\theta_v = \theta_0$ προκύπτει $v \propto \theta_v - \theta$ και ο χρόνος απειρίζεται: $t_0 = \displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{R d\theta}{v} > \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{R d\theta}{v} \propto \int_{\theta_0-\epsilon}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\theta_0 - \theta} = +\infty$. Όταν $\theta_v < \theta_0$ προκύπτει $v \propto \sqrt{\theta_v - \theta}$ και ο χρόνος κίνησης είναι πεπερασμένος.

$\boxed{2}$: Μελέτη της συνάρτησης $V(x) = x^3 - 3x$: Είναι περιττή $V(-x) = -V(x)$, οπότε αρκεί να τη μελετήσουμε στα θετικά x και στη συνέχεια την επεκτείνουμε στα αρνητικά x.

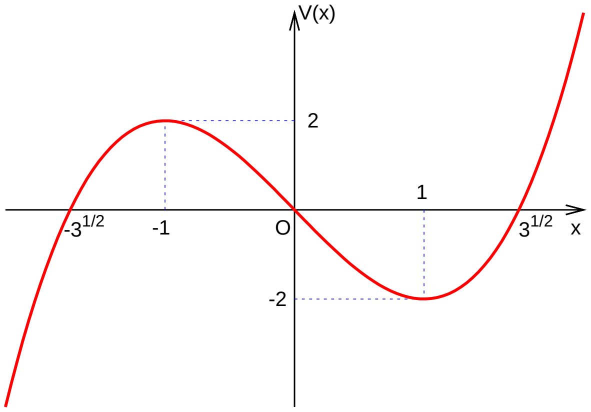
Η συνάρτηση γράφεται $V = x^3 - 3x = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, δηλ. μηδενίζεται στα $x = -\sqrt{3}\,, 0\,, \sqrt{3}$.

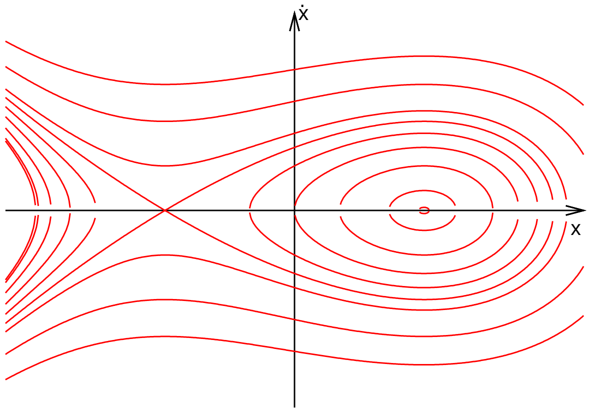
Η πρώτη παράγωγος είναι $V' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ και μηδενίζεται στα $x = -1\,, 1$.

Η δεύτερη παράγωγος είναι $V'' = 6x$ και μηδενίζεται στο $x = 0$.

Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα φτιάχνουμε τη γραφική παράσταση (ακολουθεί).

x	0		1		$+\infty$
V'		-	0	+	
V''	0	+		+	
V	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$





Στο προηγούμενο σχήμα φαίνονται οι καμπύλες φάσης, θα μας χρειαστούν στο (β) ερώτημα.

(α) $E_A = 0 + V(0) = 0$, άρα η γραφική λύση της ανισότητας $V(x_A) \le E_A$ είναι $0 \le x_A \le \sqrt{3}$, δηλ. η κίνηση είναι ταλάντωση μεταξύ των $x_A = 0$ και $x_A = \sqrt{3}$. (Η $V(x_A) \le E_A$ ισχύει και για $x_A \le -\sqrt{3}$, αλλά αφού αρχικά $x_A = 0$ μας ενδιαφέρει μόνο το διάστημα $[0\,,\sqrt{3}]$.)

Η περίοδος της κίνησης είναι $T = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\dot{x}} + \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{dx}{\dot{x}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{+\sqrt{\frac{2}{m_A}[E_A - V(x)]}} + \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{dx}{-\sqrt{\frac{2}{m_A}[E_A - V(x)]}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^3}} \approx 3.985$.

Γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας $x = 1$ είναι $V(x) \approx V(1) + V'(1)(x-1) + \frac{1}{2}V''(1)(x-1)^2 = -2 + 3(x-1)^2$, οπότε η εξίσωση κίνησης είναι $m_A \ddot{x} = -\dfrac{dV}{dx} \Leftrightarrow 2\ddot{x} + 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \underbrace{3}_{\omega^2}(x-1) = 0$. Η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων είναι $T_a = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3.628$.

Η σχετική διαφορά από την T είναι $\dfrac{|T - T_a|}{T} \approx 9\%$.

(β) $E_B = \dfrac{m_B v_0^2}{2} + V(-2) = v_0^2 - 2$.

(β_1) Αν $E_B \le 2 \overset{v_0>0}{\Longleftrightarrow} v_0 \le 2$ το σώμα Β δεν θα περάσει το «φράγμα» δυναμικού γύρω από το $x=-1$ και άρα δε θα συγκρουστεί με το σώμα Α.

(β_2) Για $v_0>2$ το Β θα φτάσει στην περιοχή κίνησης του Α και θα συγκρουστεί μαζί του. Το Α βρίσκεται στο σημείο $x=0$ στους χρόνους που είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου (αφού για $t=0$ βρίσκεται στο ακραίο σημείο της ταλάντωσής του $x=0$). Άρα για να συγκρουστούν τα Α και Β στο $x=0$ πρέπει ο χρόνος για να κινηθεί το Β από το $x=-2$ στο $x=0$ να είναι nT με $n=1,2,\ldots$. Δηλ. πρέπει $T_B=nT$ με $T_B=\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m_B}\left[E_B-V(x)\right]}}=\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{E_B+3x-x^3}}$.

Ισοδύναμα, ο λόγος $T_B/T=n\Leftrightarrow f(v_0)=n$, όπου $f(v_0)=\left[\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2dx}{\sqrt{3x-x^3}}\right]^{-1}\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{E_B+3x-x^3}}$, με $E_B=v_0^2-2$.

Από το γράφημα της συνάρτησης $f(v_0)$ (δίνεται στην εκφώνηση) μπορούμε να βρούμε τις τιμές της v_0 που δίνουν ακέραιες τιμές της $f(v_0)$. Αλλιώς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική έκφραση που δίνεται στην εκφώνηση, η οποία βλέπουμε από το γράφημα ότι σχεδόν ταυτίζεται με τις αριθμητικές τιμές (η πράσινη και η κόκκινη καμπύλη πρακτικά ταυτίζονται).

Οι λύσεις είναι $0.160-0.145\ln(v_0-2)=n\Leftrightarrow$
$v_0-2=e^{-\frac{n-0.160}{0.145}}=\underbrace{3\times10^{-3}}_{\text{για } n=1},\underbrace{3\times10^{-6}}_{\text{για } n=2},\underbrace{3\times10^{-9}}_{\text{για } n=3},\ldots$

Η προσεγγιστική σχέση αντιστοιχεί στην αντικατάσταση $E_B+3x-x^3=E_B-2+3(x+1)^2-(x+1)^3\approx E_B-2+3(x+1)^2$ μέσα στο ολοκλήρωμα που δίνει το χρόνο T_B, κάτι που ισχύει στη γειτονιά του $x=-1$ όπου η συνεισφορά είναι μεγαλύτερη αν $E_B\approx2$. Έτσι προκύπτει $T_B\approx\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{E_B-2+3(x+1)^2}}$.

Με την αντικατάσταση $x+1=\sqrt{\dfrac{E_B-2}{3}}\xi$ βρίσκουμε $T_B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_{-\xi_0}^{\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsinh}\xi_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\xi_0+\sqrt{\xi_0^2+1}\right)$, όπου $\xi_0=\sqrt{\dfrac{3}{E_B-2}}$. Για $E_B\approx2\Leftrightarrow\xi_0\gg1$ το αποτέλεσμα απλοποιείται περισσότερο $T_B\approx\dfrac{2}{\sqrt{3}}\ln(2\xi_0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\dfrac{12}{E_B-2}$ ή $T_B\approx\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\dfrac{3}{v_0-2}$ αφού $E_B-2=v_0^2-2\approx4(v_0-2)$ για $v_0\approx2$. Έτσι η σχέση $T_B=nT$ δίνει $v_0-2=3e^{-nT\sqrt{3}}=3\times10^{-nT\sqrt{3}\log e}\approx3\times10^{-3n}$ για $T\approx3.985$.

(β_{21}) Αν τα σώματα συγκρουστούν ελαστικά στο $x=0$ θα ανταλλάξουν ταχύτητες (αφού έχουν ίσες μάζες). Αυτό προκύπτει από τη λύση τους συστήματος διατήρησης ορμής και ενέργειας

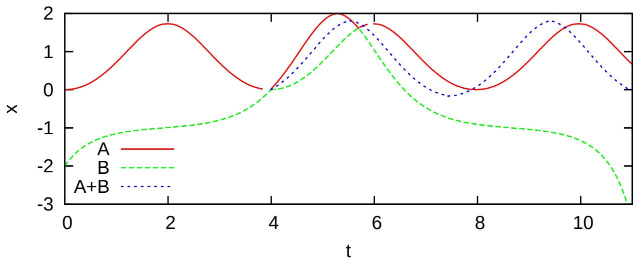
$$\left.\begin{array}{l}m_Av_A+m_Bv_B=m_Av_A'+m_Bv_B'\\ \frac12m_Av_A^2+\frac12m_Bv_B^2=\frac12m_Av_A'^2+\frac12m_Bv_B'^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}v_A'=v_B\\ v_B'=v_A\end{array}\right.$$

Πριν την κρούση τα Α, Β έχουν $v_A=\sqrt{E_A-V(0)}=0$ και $v_B=\sqrt{E_B-V(0)}\approx\sqrt{2}$. Άρα μετά την κρούση $v_B'=0$, $v_A'\approx\sqrt{2}$, $E_B'=E_A=0$ και $E_A'=E_B=2$.

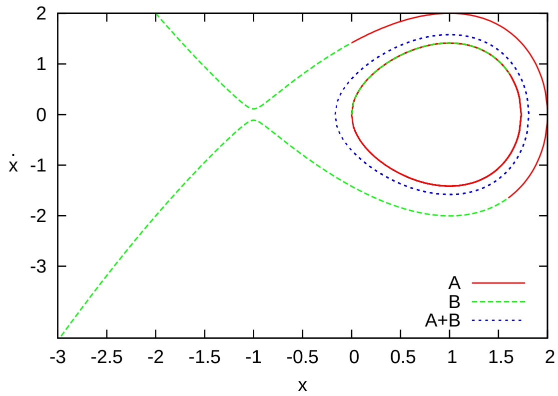
Το Β θα αρχίσει να κινείται όπως το Α πριν την κρούση, δηλ. θα αρχίσει να εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των $x=0$ και $x=\sqrt{3}$. Το Α θα συνεχίσει την κίνηση που έκανε το Β πριν την κρούση, κίνηση μέχρι το σημείο $x\approx2$ όπου $V(x)=E_A'=2$.

Όμως τα σώματα θα συγκρουστούν ξανά σε κάποια θέση, θα ανταλλάξουν ξανά ταχύτητες και θα καταλήξουν να κινούνται το μεν Α ταλαντωτικά μεταξύ των $x=0$ και $x=\sqrt{3}$, το δε Β προς το $x=-\infty$.

Το ακόλουθο σχήμα (κόκκινες και πράσινες καμπύλες) δίνει τη θέση των δύο σωμάτων συναρτήσει του χρόνου, όπως προκύπτει από αριθμητική επίλυση για την τιμή της $v_0=2.0031$ που αντιστοιχεί σε κρούση στο $x=0$ μετά από χρόνο $T_B=T$ (δηλ. $n=1$).



(β_{22}) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται με κόκκινο η καμπύλη φάσης για το σώμα Α και με πράσινο η καμπύλη φάσης για το σώμα Β.



Το Α ξεκινά από το $(x=0,\dot x=0)$ και μετά από ακέραιο πλήθος περιστροφών ξαναγυρνά στο αρχικό σημείο όπου συγκρούεται με το Β. Λόγω της κρούσης, μεταβαίνει ακαριαία στο σημείο $(x=0,\dot x\approx\sqrt{2})$. Ακολουθεί την καμπύλη φάσης φτάνοντας σε μέγιστο $x=2$ και γυρνώντας συγκρούεται ξανά με το Β (στο $x\approx1.6$), οπότε μεταβαίνει στην αρχική περιοδική καμπύλη φάσης όπου μένει για πάντα.

Το Β ξεκινά από το $(x=-2,\dot x=2)$ και περνώντας κοντά από το ασταθές σημείο ισορροπίας $(x = -1, \dot{x} = 0)$ φτάνει στο $(x = 0, \dot{x} \approx \sqrt{2})$ όπου συγκρούεται με το A, οπότε μεταβαίνει ακαριαία στο σημείο $(x = 0, \dot{x} = 0)$. Ακολουθεί την περιοδική καμπύλη φάσης μέχρι να συγκρουστεί ξανά με το A (στο $x \approx 1.6$). Μετά τη δεύτερη κρούση κινείται συνεχώς προς μικρότερα x, περνάει κοντά από το ασταθές σημείο ισορροπίας $(x = -1, \dot{x} = 0)$ και φτάνει στο $x = -\infty$.

(β_{23}) Αν τα σώματα συγκρουστούν πλαστικά στο $x = 0$ η αρχή διατήρησης ορμής δίνει ότι το συσσωμάτωμα θα έχει ταχύτητα $v' = \dfrac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ αμέσως μετά την κρούση.

Στο συσσωμάτωμα ασκείται δύναμη $F_A + F_B = -2\dfrac{dV}{dx}$ οπότε η εξίσωση κίνησής του είναι $(m_A + m_B)\ddot{x} = F_A + F_B \Leftrightarrow 4\ddot{x} = -2\dfrac{dV}{dx}$ και το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{1}{2}(m_A + m_B)\dot{x}^2 + 2V(x) = E$ με $E = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v'^2 + 2V(0) = 1$. Ισοδύναμα το ολοκλήρωμα γράφεται $\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}$ οπότε η επιτρεπτή περιοχή του άξονα x μπορεί να βρεθεί λύνοντας γραφικά την ανισότητα $V(x) \leq \frac{1}{2}$. Προκύπτει ταλαντωτική κίνηση μεταξύ των $x = -0.17$ και $x = 1.81$.

Στα προηγούμενα σχήματα με μπλε φαίνεται η συνάρτηση $x(t)$ για το συσσωμάτωμα και η περιοδική καμπύλη φάσης που ακολουθεί.

$\boxed{3}$: Από τις σχέσεις της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης $\left\{ \begin{array}{l} x = D\cos(\omega t + \phi) \\ v = -\omega D \sin(\omega t + \phi) \\ a = -\omega^2 D \cos(\omega t + \phi) \end{array} \right\}$ έχουμε

$\omega = \sqrt{-\dfrac{a}{x}} = 2\ \mathrm{ms^{-2}}$, $D = \sqrt{x^2 + \dfrac{v^2}{\omega^2}} = 5\ \mathrm{ms^{-1}}$,

ενώ η φάση είναι η κοινή λύση των $\left\{ \begin{array}{l} x = D\cos(\omega t + \phi) \\ v = -\omega D \sin(\omega t + \phi) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\phi = 3/5 \\ \sin\phi = -4/5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$\phi = -\arcsin\dfrac{4}{5} = -0.927$ rad.

Άρα $x = 5\cos(2t - 0.927)$, όλα στο διεθνές σύστημα μονάδων.

Πλάτος $D = 5$, περίοδος $T = 2\pi/\omega = \pi$.

$F = ma = -m\omega^2 D\cos(\omega t + \phi) = -40\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \phi\right) = -40\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\phi - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\phi\right) = 16\sqrt{3} - 12 = 15.7$.

$\boxed{4}$: (α) Η δύναμη είναι $\vec{F} = -\nabla V = -\cos x\hat{x}$, οπότε ο νόμος του Νεύτωνα δίνει την εξίσωση κίνησης $\ddot{x} + \cos x = 0$.

(β) Τα σημεία ισορροπίας είναι σταθερές λύσεις της εξίσωσης κίνησης. Για τις σταθερές αυτές λύσεις $x(t) = x_0 =$ σταθερά, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ και η εξίσωση κίνησης δίνει $0 + \cos x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Θέτοντας $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} + q$ με $|q| \ll 1$ είναι

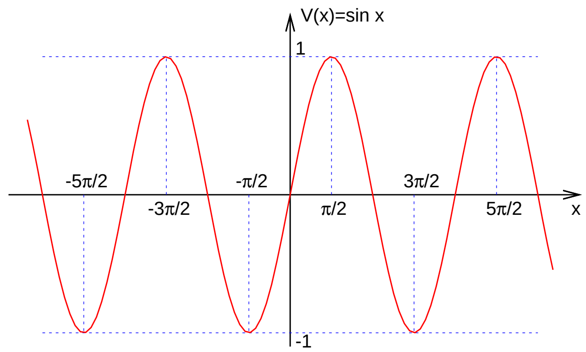
$F = -\cos\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2} + q\right) = (-1)^k \sin q \approx (-1)^k q$.

Η εξίσωση κίνησης είναι $\ddot{q} - (-1)^k q = 0$.

- Για άρτια k είναι $\ddot{q} - q = 0$ με λύσεις $q = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ που απειρίζονται σε μεγάλους χρόνους. Άρα τα σημεία ισορροπίας αυτά είναι ασταθή.
- Για περιττά k είναι $\ddot{q} + q = 0$ με λύσεις $q = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ οι οποίες περιγράφουν αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας. Επομένως τα σημεία ισορροπίας αυτά είναι ευσταθή.

(γ) Η κίνηση γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας $x_0 = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ όπου k περιττός ακέραιος αριθμός βρέθηκε πριν να είναι $q = C_1 \sin t + C_2 \cos t \Leftrightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} + C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Αυτή είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

Για τα ερωτήματα (β) και (γ) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x) = \sin x$. Η συνάρτηση αυτή έχει ακρότατα $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$. Αυτά είναι ελάχιστα (στα οποία $V''(x) > 0$) όταν k περιττός ακέραιος – όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα – και μέγιστα (στα οποία $V''(x) < 0$) όταν k άρτιος ακέραιος. Τα ελάχιστα είναι ευσταθή σημεία ισορροπίας, ενώ τα μέγιστα είναι ασταθή σημεία ισορροπίας.



Γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας $x_0 = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ με k περιττό ακέραιο, είναι $V(x) \approx V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 = -1 + \dfrac{1}{2}\left(x - k\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$, οπότε η δύναμη είναι $F(x) = -V'(x) \approx -\left(x - k\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$ και ο νόμος του Νεύτωνα $\ddot{x} + \left(x - k\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \xLeftrightarrow{q = x - k\pi - \pi/2} \ddot{q} + q = 0$.

Αυτή είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ με $\omega = 1$, άρα $T = 2\pi/\omega = 2\pi$.

(δ) Πρέπει το σώμα να έχει $E > 1$ ώστε να περάσει το «φράγμα» δυναμικού (το οποίο έχει ύψος $V_{\max} = 1$) και να κινείται προς το σημείο $x = 0$ (δηλ. να έχει ταχύτητα $v_0 > 0$). Είναι $E = \frac{1}{2}v_0^2 + V(x_0)$ με $V(x_0) = \sin\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
Άρα $E > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow v_0^2 > 1 \overset{v_0>0}{\Longleftrightarrow} v_0 > 1$.

$\boxed{5}$: Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\begin{cases} v_x = -\dfrac{1+\omega^2\tau^2}{\tau} De^{-t/\tau}\sin(\omega t) \\ v_y = -\dfrac{1+\omega^2\tau^2}{\tau} De^{-t/\tau}\cos(\omega t) \\ v_z = -\dfrac{1}{\tau} Ce^{-t/\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{1+\omega^2\tau^2}{\tau^2} De^{-t/\tau}\left[\sin(\omega t) - \omega\tau\cos(\omega t)\right] \\ a_y = \dfrac{1+\omega^2\tau^2}{\tau^2} De^{-t/\tau}\left[\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)\right] \\ a_z = \dfrac{1}{\tau^2} Ce^{-t/\tau} \end{cases}$$

(α) Η επιτάχυνση μπορεί να εκφραστεί σαν

$$\left\{\begin{array}{l} a_x = -v_x/\tau + \omega v_y \\ a_y = -v_y/\tau - \omega v_x \\ a_z = -v_z/\tau \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{\vec{v}}{\tau} + \omega\vec{v}\times\hat{z} \Leftrightarrow$$

$$\vec{F} = \underbrace{-\frac{m}{\tau}\vec{v}}_{\text{αντίσταση αέρα}} + \underbrace{m\omega\vec{v}\times\hat{z}}_{\text{δύναμη από μαγνητικό πεδίο } \vec{B}=\frac{m\omega}{q}\hat{z}}$$

(β) Από τις εξισώσεις της εκφώνησης βρίσκουμε

$$\begin{cases} De^{-t/\tau}\sin(\omega t) = \dfrac{x - x_0 - \omega\tau\,(y-y_0)}{1+\omega^2\tau^2} \\ De^{-t/\tau}\cos(\omega t) = \dfrac{y - y_0 + \omega\tau\,(x-x_0)}{1+\omega^2\tau^2} \\ Ce^{-t/\tau} = z - z_0 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της επιτάχυνσης

$$\left\{\begin{array}{l} a_x = \dfrac{x-x_0}{\tau^2} - \omega^2\,(x-x_0) - 2\dfrac{\omega}{\tau}\,(y-y_0) \\ a_y = \dfrac{y-y_0}{\tau^2} - \omega^2\,(y-y_0) + 2\dfrac{\omega}{\tau}\,(x-x_0) \\ a_z = \dfrac{z-z_0}{\tau^2} \end{array}\right\}$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφούν σαν

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\tau^2} - \omega^2\left[\hat{z}\times(\vec{r}-\vec{r}_0)\right]\times\hat{z} - 2\frac{\omega}{\tau}\,(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\hat{z}$$

οπότε προκύπτει και η σχέση $\vec{F} = m\vec{a}$ σαν συνάρτηση της θέσης.

$\boxed{6}$: $\vec{r} = x\,(\hat{x}+\hat{y})$ αφού $y = x$, $\vec{v} = \dot{x}\,(\hat{x}+\hat{y})$, $\vec{a} = \ddot{x}\,(\hat{x}+\hat{y})$. Νόμος Νεύτωνα $m\ddot{x}\,(\hat{x}+\hat{y}) = \vec{F}+\vec{N}$, όπου $\vec{F} = -\vec{\nabla}(a+bx^2) = -2bx\hat{x}$ και $\vec{N}\perp\vec{v}$. Άρα η προβολή της εξίσωσης Νεύτωνα πάνω στην τροχιά, έστω πάνω στο $\hat{x}+\hat{y}$ που είναι παράλληλο στην ταχύτητα, δίνει $m\ddot{x}\,(\hat{x}+\hat{y})\cdot(\hat{x}+\hat{y}) = -2bx\hat{x}\cdot(\hat{x}+\hat{y}) + \underbrace{\vec{N}\cdot(\hat{x}+\hat{y})}_{0} \Leftrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{\omega^2} x = 0 \Leftrightarrow x = D\sin(\omega t + C)$.

Άρα $\vec{r} = D\sin(\omega t + C)\,(\hat{x}+\hat{y})$,
$\vec{v} = \omega D\cos(\omega t + C)\,(\hat{x}+\hat{y})$,
$v^2 = 2\omega^2 D^2\cos^2(\omega t + C) = 2\frac{b}{m}D^2\cos^2(\omega t + C)$.

$T + V = \frac{mv^2}{2} + a + bx^2 = bD^2\cos^2(\omega t + C) + a + bD^2\sin^2(\omega t + C) = a + bD^2 =$ σταθερή, όπως περιμέναμε (αφού οι δυνάμεις που ασκούνται είναι συντηρητικές).

Αλλιώς: Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση Νεύτωνα προβάλλοντάς την πάνω στην ευθεία της κίνησης, ορίζοντας ένα νέο άξονα $s'Os$ πάνω της. Ο άξονας αυτός (δηλ. η ευθεία κίνησης) σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'Ox$. Άρα $x = s\cos 45° = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Η προβολή της δύναμης $\vec{F}$ στον άξονα $s'Os$ είναι $F_s = F\cos 45° = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{-2bx}{\sqrt{2}} = -bs$, ενώ η $\vec{N}$ έχει μηδενική προβολή $N_s = 0$. Έτσι $m\ddot{s} = -bs \Leftrightarrow s = D_0\sin(\omega t + C)$ με $\omega = \sqrt{\frac{b}{m}}$. Η ταχύτητα είναι $\dot{s} = \omega D_0\cos(\omega t + C)$, η κινητική ενέργεια $\frac{m\omega^2 D_0^2}{2}\cos^2(\omega t + C) = \frac{bD_0^2}{2}\cos^2(\omega t + C)$ και η δυναμική ενέργεια $V = a + b\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = a + \frac{bD_0^2}{2}\sin^2(\omega t + C)$. Είναι $T + V = a + \frac{bD_0^2}{2} =$ σταθερή.