2η εργασία Μηχανικής Ι (2010-2011)

$\boxed{1}$: Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ κινείται περασμένο σε λείο σύρμα που έχει το σχήμα της εκθετικής σπείρας. Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις: η κάθετη αντίδραση από το σύρμα $\vec{N}$ και δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στην ταχύτητα $\vec{v}$. Η θέση του σώματος (σε καρτεσιανές συντεταγμένες Oxy στο επίπεδο της τροχιάς) σαν συνάρτηση του χρόνου t είναι

$$x(t) = \frac{\lambda\cos t + \sin t}{1+\lambda^2}e^{\lambda t}, \quad y(t) = \frac{\lambda\sin t - \cos t}{1+\lambda^2}e^{\lambda t},$$

όπου λ σταθερά.
(α) Ποιο το μοναδιαίο $\hat{t}(t)$ στη φορά κίνησης, ποια η γωνία μεταξύ ταχύτητας $\vec{v}$ και θέσης $\vec{r}$ και ποια η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\varepsilon(t)$;
(β) Ποια η κεντρομόλος συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{a}_\kappa(t)$, ποιο το μοναδιαίο $\hat{n}(t)$ προς το κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς και ποια η ακτίνα καμπυλότητας $R(t)$;
(γ) Βρείτε τις δυνάμεις $\vec{N}$ και $\vec{F}$ σε κάθε χρόνο t. Δείξτε ότι το μέτρο τους είναι ανάλογο της απόστασης $\sqrt{x^2+y^2}$ του σώματος από το O.
(δ) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε χρόνο; Αν $\lambda < 0$, αυτός που ασκεί την δύναμη $\vec{F}$ δίνει ή παίρνει ενέργεια από το δαχτυλίδι; Πόσο είναι το έργο της $\vec{F}$ για την κίνηση από $t = 0$ ως $t = \ln 2/|\lambda|$;
(ε) Δείξτε ότι το μέτρο των δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{F}$ είναι ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $\vec{F} = -b\vec{v}$ και $\vec{N} = \vec{v}\times q\vec{B}$, με $q\vec{B}$ ένα σταθερό διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο κίνησης, δηλαδή $q\vec{B} = qB\hat{z}$. Έτσι, η εξίσωση του Newton γράφεται $m\vec{a} = -b\vec{v} + \vec{v}\times q\vec{B}$. Αναφέρατε ένα άλλο φυσικό πρόβλημα για το οποίο ισχύει αυτή η εξίσωση. Ποια τα b και qB ώστε το σώμα να μπορέσει να εκτελέσει την τροχιά σχήματος εκθετικής σπείρας που δόθηκε;

$\boxed{2}$: Ομογενής κύβος ακμής h και πυκνότητας ρ_κ κρατείται βυθισμένος μέσα σε υγρό πυκνότητας $\rho_\upsilon = 2\rho_\kappa$ με την πάνω έδρα του να βρίσκεται στην επιφάνεια του υγρού. Για $t = 0$ ο κύβος αφήνεται να κινηθεί κάτω από την επίδραση του βάρους του $\rho_\kappa h^3 g$, της άνωσης και της αντίστασης από το υγρό, η οποία υπάρχει μόνο όταν η μπροστά έδρα (αυτή που βρίσκεται στη φορά της ταχύτητας) είναι βυθισμένη. Η άνωση είναι $\rho_\upsilon h^2 g\,(x + h/2)$ αν το κέντρο του κύβου έχει βυθιστεί κατά $x \in (-h/2, h/2)$ και $\rho_\upsilon h^3 g$ αν $x > h/2$. Η αντίσταση είναι $\frac{1}{2}\rho_\upsilon h^2 v^2$, όπου $v = \dot{x}$ η ταχύτητα του κύβου.
(α) Δείξτε ότι αν μετράμε μήκη σε h, μάζες σε $\rho_\kappa h^3$ και χρόνους σε $\sqrt{h/g}$, οι αδιάστατες εξισώσεις κίνησής είναι

$$a = \begin{cases} 1 & \text{αν } x < -1/2\,, \\ -2x - v^2 & \text{αν } -1/2 < x < 1/2 \text{ και } v \geq 0\,, \\ -2x & \text{αν } -1/2 < x < 1/2 \text{ και } v \leq 0\,, \\ -1 - v^2 & \text{αν } x > 1/2 \text{ και } v \geq 0\,, \\ -1 + v^2 & \text{αν } x > 1/2 \text{ και } v \leq 0\,, \end{cases}$$

όπου $a = \dot{v} = \ddot{x}$ η επιτάχυνση (δηλαδή μπορούμε να θέσουμε $h = \rho_\kappa = g = 1$).
(β) Δείξτε ότι από την αρχική θέση $x_0 = 1/2$ ο κύβος θα ανέβει μέχρι τη θέση $-x_0$, θα κατέβει μέχρι τη θέση x_1, θα ανέβει μέχρι τη θέση $-x_1$, θα κατέβει μέχρι τη θέση x_2, κ.ο.κ., όπου τα x_n βρίσκονται από την αναδρομική σχέση $(1-2x_n)\,e^{2x_n} = (1+2x_{n-1})\,e^{-2x_{n-1}}$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$[1]
Υπόδειξη: Σκεφτείτε τι είδους κίνηση είναι η ανοδική, ενώ για τις καθόδους βρείτε την ταχύτητα σα συνάρτηση της θέσης x για να υπολογίσετε τις θέσεις όπου η ταχύτητα στιγμιαία μηδενίζεται.
Δίνεται ότι η διαφορική $v\dfrac{dv}{dx} = Av^2 + Bx$ έχει λύση $v^2 = Ce^{2Ax} - \dfrac{B}{A}x - \dfrac{B}{2A^2}$.
(γ) Δείξτε ότι η χρονική διάρκεια κάθε ανόδου είναι $\pi/\sqrt{2} \approx 2.2214$, ενώ η χρονική διάρκεια της $n-$οστής καθόδου είναι $\Delta t_n = \displaystyle\int_{-x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{\sqrt{1-2x-(1+2x_{n-1})\,e^{-2(x+x_{n-1})}}}$, με $n = 1, 2, 3, \ldots$[2]
(δ) Σχεδιάστε την $x(t)$ και το διάγραμμα φάσης για την κίνηση του κύβου.

$\boxed{3}$: Έστω $\vec{F} = \dfrac{(a+1)\,z\,(x\hat{x}+y\hat{y}) + (az^2-x^2-y^2)\,\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}}$ όπου a, b σταθερές με $b > 0$.
(α) Ποιο το έργο της $\vec{F}$ για μια κλειστή διαδρομή σχήματος τετραγώνου με κορυφές τα Α$(0,0,1)$, Β$(1,0,1)$, Γ$(1,1,1)$, Δ$(0,1,1)$ και φορά κίνησης Α→Β→Γ→Δ→Α;
(β) Για ποια σχέση των a και b η δύναμη είναι συντηρητική; Ποια η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$;
(γ) Ποια η έκφραση της $\vec{F}$ σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες;

$\boxed{4}$: Έστω δύναμη $\vec{F} = \dfrac{a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}$, σε σφαιρικές συντεταγμένες $(r\,,\theta\,,\phi)$, όπου a σταθερά.
(α) Βρείτε το έργο της δύναμης αυτής για τις ακόλουθες διαδρομές:
(α$_1$) Από το σημείο $A(x=1\,, y=0\,, z=0)$ στο σημείο $B(x=0\,, y=1\,, z=0)$ πάνω στο τεταρτο-

[1] Αριθμητικά προκύπτει $(x_1, x_2, \ldots) \approx (0.2968, 0.2120, 0.1650, 0.1352, 0.1145, 0.0993, 0.0877, 0.0785, 0.0710, \ldots)$.
[2] Αριθμητικά προκύπτει $(\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots) \approx (2.2786, 2.2451, 2.2345, 2.2298, 2.2272, 2.2257, 2.2247, 2.2240, \ldots)$.

κύκλιο $x^2+y^2=1\,,z=0$.

(α_2) Από το σημείο $B(x=0\,,y=1\,,z=0)$ στο σημείο $C(x=0\,,y=0\,,z=1)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $y^2+z^2=1\,,x=0$.

(α_3) Από το σημείο $C(x=0\,,y=0\,,z=1)$ στο σημείο $A(x=1\,,y=0\,,z=0)$ πάνω στο τεταρτοκύκλιο $x^2+z^2=1\,,y=0$.

(α_4) Από το σημείο $C(x=0\,,y=0\,,z=1)$ στο σημείο $A(x=1\,,y=0\,,z=0)$ πάνω στην ευθεία $z=1-x\,,y=0$.

(α_5) Από το σημείο $C(x=0\,,y=0\,,z=1)$ στο σημείο $A(x=1\,,y=0\,,z=0)$ πάνω στη διαδρομή που αποτελείται από το τμήμα από το C στην αρχή των αξόνων O και από το O στο A.

(α_6) Από το σημείο $C(x=0\,,y=0\,,z=1)$ στο σημείο $A(x=1\,,y=0\,,z=0)$ πάνω στη διαδρομή που αποτελείται από την ημιευθεία από το C στο $D(x=0\,,y=0\,,z=R)$ με $R\to\infty$, από τμήμα κύκλου $x^2+z^2=R^2\,,y=0$ μέχρι το $E(x=R\,,y=0\,,z=0)$ και από το E στο A πάνω στην ευθεία $y=0\,,z=0$.

(β) Από τα αποτελέσματά σας στα προηγούμενα ερωτήματα βρείτε για ποια τιμή της σταθεράς a ίσως η $\vec{F}$ είναι συντηρητική. Είναι πράγματι συντηρητική για αυτή την τιμή της a; Αν ναι βρείτε την δυναμική ενέργεια $V(r\,,\theta\,,\phi)$ και υπολογίστε τα έργα στις διαδρομές του ερωτήματος (α) χρησιμοποιώντας την V.

$\boxed{5}$: Δαχτυλίδι μάζας $m=1$ μπορεί να κινείται χωρίς τριβές περασμένο σε οριζόντιο σύρμα σχήματος $r=\cos\phi$ (σε πολικές συντεταγμένες). Αρχικά ($t=0$) αφήνεται από τη θέση $\phi=0$ να κινηθεί κάτω από την επίδραση του πεδίου δύναμης $\vec{F}=2xy\hat{x}+x^2\hat{y}$.

(α) Ποια η ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση της θέσης;

(β) Γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει τη σχέση $t=t(\phi)$.

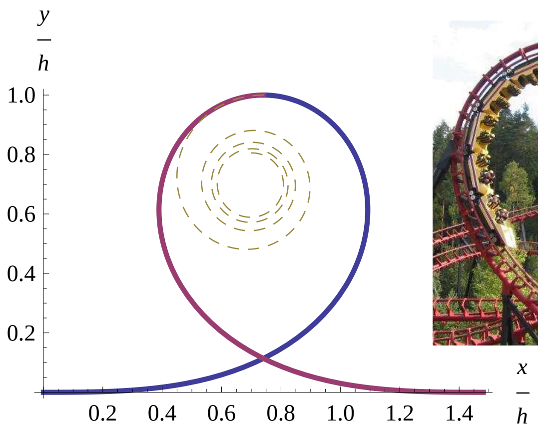
(γ) Ποια η δύναμη που ασκεί το σύρμα στο δαχτυλίδι;

(δ) Περιγράψτε την κίνηση μέχρι $t\to\infty$.

$\boxed{6}$: Σε ένα θεματικό πάρκο (luna park) ένα τρενάκι (roller coaster) εκτελεί κατακόρυφη πλήρη τροχιά η οποία έχει μέγιστο ύψος h και γίνεται με τρόπο ώστε να μην ασκείται δύναμη από τις ράγες στα βαγόνια στη θέση μέγιστου ύψους. Το τρενάκι θεωρείται σημειακό σώμα και οι τριβές αγνοούνται.

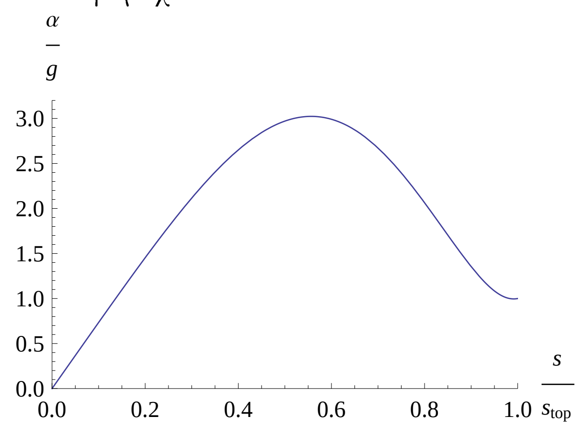
(α) Αν η τροχιά είναι κυκλική (ακτίνας $R=h/2$) βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση των αναβατών (σε μονάδες g). Σε ποιο σημείο υλοποιείται;

(β) Η επιλογή κυκλικής τροχιάς έχει δύο σημαντικά μειονεκτήματα: (i) η επιτάχυνση αποκτά ακαριαία την μέγιστη τιμή της και (ii) η μέγιστη αυτή τιμή είναι πολύ υψηλή. Μια καλύτερη επιλογή τροχιάς είναι τμήμα κλωθοειδούς καμπύλης, όπως αυτή του σχήματος, η οποία έχει παραμετρική εξίσωση $x(s)=\int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right)ds$, $y(s)=\int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right)ds$, με s το μήκος πάνω στην καμπύλη και $s_{\rm top}$ σταθερά.



Δείξτε την βασική ιδιότητα της κλωθοειδούς: η καμπυλότητα ($1/\mathcal{R}$) αυξάνεται γραμμικά με το μήκος s. Υπόδειξη: Βρείτε το μοναδιαίο $\hat{t}$ πάνω στην καμπύλη και χρησιμοποιήστε την $\frac{d\hat{t}}{ds}=\frac{\hat{n}}{\mathcal{R}}$.

Βρείτε την έκφραση της επιτάχυνσης (το γράφημά της δίνεται παρακάτω) και σχολιάστε τις διαφορές με την κυκλική τροχιά.



ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$: Οι δοσμένες σχέσεις για τα $x(t)$, $y(t)$ δίνουν

$$\left.\begin{array}{l}\sin t\; e^{\lambda t}=x+\lambda y\\ \cos t\; e^{\lambda t}=\lambda x-y\end{array}\right\}\Leftrightarrow e^{(\lambda+i)t}=(\lambda+i)(x+iy).$$

Θέτοντας $x+iy=\varpi e^{i\phi}$ (πολικές συντεταγμένες) και $\lambda+i=\dfrac{1}{\sin\mu}e^{i\mu}$ με $\lambda=\cot\mu$, $\mu\in(0\,,\pi)$, γράφουμε

$$\sin\mu\;\, e^{t\cot\mu}e^{it}=\varpi e^{i(\phi+\mu)}\Leftrightarrow\begin{cases}\varpi=\sin\mu\; e^{t\cot\mu}\\ \phi=t-\mu\end{cases}$$

Απαλείφοντας το χρόνο βλέπουμε ότι η τροχιά είναι εκθετική (ή λογαριθμική όπως αλλιώς λέγεται) σπείρα $\varpi=\varpi_0\; e^{\lambda\phi}$ με $\varpi_0=\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}e^{\lambda\ \mathrm{arccot}\lambda}$.

$\dot x=\cos t\; e^{\lambda t}$, $\dot y=\sin t\; e^{\lambda t}$,

$\ddot x=(\lambda\cos t-\sin t)\; e^{\lambda t}$, $\ddot y=(\lambda\sin t+\cos t)\; e^{\lambda t}$.

$\vec r=x\hat x+y\hat y=e^{\lambda t}\dfrac{(\lambda\cos t+\sin t)\hat x+(\lambda\sin t-\cos t)\hat y}{1+\lambda^2}$,

$\vec v=\dot x\hat x+\dot y\hat y=e^{\lambda t}(\cos t\;\hat x+\sin t\;\hat y)$,

$\vec a=\ddot x\hat x+\ddot y\hat y=e^{\lambda t}\left[(\lambda\cos t-\sin t)\hat x+(\lambda\sin t+\cos t)\hat y\right]$.

(α) $\hat t=\dfrac{\vec v}{|\vec v|}=\cos t\;\hat x+\sin t\;\hat y$, διότι $|\vec v|=e^{\lambda t}$.

$\cos(\widehat{\vec v\,,\vec r})=\dfrac{\vec v\cdot\vec r}{|\vec v|\;|\vec r|}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, διότι $|\vec r|=\dfrac{e^{\lambda t}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

Θέτοντας $\lambda=\cot\mu$, $\mu\in(0\,,\pi)$, βρίσκουμε ότι η γωνία $(\widehat{\vec v\,,\vec r})$ μεταξύ ταχύτητας και θέσης είναι σταθερή και ίση με $\mu=\mathrm{arccot}\lambda$.

$\vec a_\varepsilon=(\vec a\cdot\hat t)\hat t=\lambda e^{\lambda t}(\cos t\;\hat x+\sin t\;\hat y)$.

(β) $\vec a_\kappa=\vec a-\vec a_\varepsilon=e^{\lambda t}\left(-\sin t\;\hat x+\cos t\;\hat y\right)$.

$\hat n=\dfrac{\vec a_\kappa}{|\vec a_\kappa|}=-\sin t\;\hat x+\cos t\;\hat y$, διότι $|\vec a_\kappa|=e^{\lambda t}$.

$|\vec a_\kappa|=\dfrac{v^2}{R}\Leftrightarrow R=\dfrac{v^2}{|\vec a_\kappa|}=e^{\lambda t}$.

(γ) $m\vec a=\vec N+\vec F$ με $\vec N\parallel\hat n$ και $\vec F\parallel\hat t$. Άρα $\vec N=m\vec a_\kappa=e^{\lambda t}\hat n$, $\vec F=m\vec a_\varepsilon=\lambda e^{\lambda t}\hat t$.

Τα μέτρα των δυνάμεων $|\vec N|=e^{\lambda t}$, $|\vec F|=|\lambda|e^{\lambda t}$.

Αφού $|\vec r|=\dfrac{e^{\lambda t}}{\sqrt{1+\lambda^2}}\Leftrightarrow e^{\lambda t}=\sqrt{1+\lambda^2}|\vec r|$, είναι $|\vec N|=\sqrt{1+\lambda^2}|\vec r|$, $|\vec F|=|\lambda|\sqrt{1+\lambda^2}|\vec r|$.

(δ) $|\vec v|=e^{\lambda t}$.

Για $\lambda<0$, η κινητική ενέργεια $\dfrac{m}{2}v^2=\dfrac{1}{2}e^{-2|\lambda|t}$ μειώνεται με το χρόνο, οπότε το έργο της δύναμης $\vec F$ είναι αρνητικό (το έργο της $\vec N$ είναι μηδέν αφού $\vec N\perp\vec v$). Άρα αυτός που ασκεί την δύναμη $\vec F$ παίρνει ενέργεια.

Αλλιώς: Από $\vec F=\lambda e^{\lambda t}\hat t$ φαίνεται ότι $\vec F$ ↗↙ $\vec v$ για $\lambda<0$ και άρα $W_F<0$.

Η κινητική ενέργεια για $t=0$ είναι $\dfrac{1}{2}$ και για $t=\dfrac{\ln 2}{|\lambda|}$ είναι $\dfrac{1}{2}e^{2\lambda\ln 2/|\lambda|}\overset{\lambda<0}{=}\dfrac{1}{2}e^{-2\ln 2}=\dfrac{1}{2}e^{\ln 2^{-2}}=\dfrac{1}{8}$.

Άρα $W_F=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{8}$.

Αλλιώς: $W_F=\displaystyle\int\vec F\cdot\vec v dt=\int_0^{\frac{\ln 2}{|\lambda|}}\lambda e^{\lambda t}\hat t\cdot e^{\lambda t}\hat t dt=-\frac{3}{8}$.

(ε) Αφού $|\vec v|=e^{\lambda t}$, είναι $|\vec N|=|\vec v|$, $|\vec F|=|\lambda||\vec v|$.

Η δύναμη $\vec F=\lambda e^{\lambda t}\hat t=\lambda\vec v$, διότι $\vec v=e^{\lambda t}\hat t$.

Αναλύοντας την $\vec N$ παράλληλα και κάθετα στην ταχύτητα $\vec N=\underbrace{(\vec N\cdot\hat t)}_{0}\hat t+\hat t\times\underbrace{(\vec N\times\hat t)}_{e^{\lambda t}\hat n\times\hat t=-e^{\lambda t}\hat z}=-\vec v\times\hat z$.

Αλλιώς: Το μοναδιαίο $\hat n=-\sin t\;\hat x+\cos t\;\hat y=-\hat t\times\hat z$, οπότε $\vec N=e^{\lambda t}\hat n=-e^{\lambda t}\hat t\times\hat z=-\vec v\times\hat z$.

Ένα πρόβλημα που περιγράφεται από την $m\vec a=-b\vec v+q\vec v\times(B\hat z)$ είναι κίνηση σώματος μάζας m και φορτίου q σε μαγνητικό πεδίο $B\hat z$, υπό την επίδραση αντίστασης μέτρου ανάλογου του μέτρου της ταχύτητας. Για $b=-\lambda m$ και $qB=-m$ η εξίσωση γράφεται $\vec a=\lambda\vec v-\vec v\times\hat z=\vec F+\vec N$ και η τροχιά μπορεί να είναι η εκθετική σπείρα που δόθηκε (αρκεί οι αρχικές συνθήκες να είναι κατάλληλες).

Η γενική λύση της εξίσωσης $\vec a=\lambda\vec v-\vec v\times\hat z$ είναι $\left\{\begin{array}{l}x=x_0+De^{\lambda t}\cos(t-\mu)\\ y=y_0+De^{\lambda t}\sin(t-\mu)\\ z=z_0+Ce^{\lambda t}\end{array}\right\}$ (η απόδειξη ακολουθεί). Για αρχικές συνθήκες $x=\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, $y=-\dfrac{1}{1+\lambda^2}$, $z=0$, $\dot x=1$, $\dot y=\dot z=0$ προκύπτει $x_0=y_0=z_0=C=0$, $\sin\mu=D=\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, $\cos\mu=\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ οδηγώντας στη δοσμένη σπείρα.

Απόδειξη: $\vec a=\lambda\vec v-\vec v\times\hat z\Leftrightarrow\begin{cases}\ddot x=\lambda\dot x-\dot y & ①\\ \ddot y=\lambda\dot y+\dot x & ②\\ \ddot z=\lambda\dot z & ③\end{cases}$

Η ③ είναι γραμμική ομογενής εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Δοκιμάζοντας εκθετικές λύσεις $e^{\xi t}$ βρίσκουμε $\xi^2=\lambda\xi\Leftrightarrow\xi=0$ ή λ, οπότε η γενική λύση είναι $z=z_0+Ce^{\lambda t}$.

Η ① $\rightsquigarrow\dot y=\lambda\dot x-\ddot x$ και αντικαθιστώντας στην ② $\rightsquigarrow\dddot x-2\lambda\ddot x+(\lambda^2+1)\,\dot x=0$, δηλ. η $x(t)$ ικανοποιεί μια γραμμική ομογενή εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Δοκιμάζοντας εκθετικές λύσεις $e^{\xi t}$ βρίσκουμε $\xi^3-2\lambda\xi^2+(\lambda^2+1)\,\xi=0\Leftrightarrow\xi=0$ ή $\lambda+i$ ή $\lambda-i$, οπότε η γενική λύση είναι $x=x_0+D_+e^{\lambda t}e^{it}+D_-e^{\lambda t}e^{it}$ ή $x=x_0+De^{\lambda t}\cos(t-\mu)$. Αντικαθιστώντας στην ① $\rightsquigarrow\dot y=D\lambda e^{\lambda t}\sin(t-\mu)+De^{\lambda t}\cos(t-\mu)\Leftrightarrow y=y_0+De^{\lambda t}\sin(t-\mu)$.

Ένας άλλος τρόπος να λυθεί το σύστημα των ①, ② είναι να ορίσουμε τη μιγαδική μεταβλητή $\zeta=x+iy$ και να γράψουμε τις εξισώσεις αυτές σαν $\ddot\zeta=\lambda\dot\zeta+i\dot\zeta$. Δοκιμάζοντας εκθετικές λύσεις $e^{\xi t}$ βρίσκουμε $\xi^2=(\lambda+i)\xi\Leftrightarrow\xi=0$ ή $\lambda+i$, οπότε η γενική λύση είναι $\zeta=\zeta_0+\zeta_1e^{(\lambda+i)t}$. Με $\zeta_0=x_0+iy_0$ και $\zeta_1=De^{-i\mu}$ βρίσκουμε $x+iy=x_0+iy_0+De^{\lambda t}e^{i(t-\mu)}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x=x_0+De^{\lambda t}\cos(t-\mu)\\ y=y_0+De^{\lambda t}\sin(t-\mu)\end{cases}$$

Ένας τρίτος τρόπος να λύσουμε την εξίσωση $\vec{a} = \lambda\vec{v} - \vec{v}\times\hat{z}$ είναι να τη γράψουμε σαν

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Αυτή δέχεται λύσεις $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} e^{\xi t}$.

Η αντικατάσταση δίνει

$$\begin{pmatrix} \xi^2-\lambda\xi & \xi & 0 \\ -\xi & \xi^2-\lambda\xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2-\lambda\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = 0.$$

Για να είναι η λύση μη μηδενική πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα $\begin{vmatrix} \xi^2-\lambda\xi & \xi & 0 \\ -\xi & \xi^2-\lambda\xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2-\lambda\xi \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $\xi^3(\xi-\lambda)(\xi-\lambda-i)(\xi-\lambda+i) = 0$. Για κάθε ξ βρίσκουμε τις σχέσεις μεταξύ των C_x, C_y, C_z. Έτσι προκύπτουν έξι ανεξάρτητες λύσεις των οποίων η επαλληλία δίνει την γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{\lambda t} + D_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}e^{(\lambda+i)t} + D_2\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}e^{(\lambda-i)t}.$$

Θέτοντας $D_1 = \frac{1}{2}De^{-i\mu}$, $D_2 = \frac{1}{2}De^{i\mu}$ (η μορφή αυτή απαιτείται ώστε η λύση να είναι πραγματική) καταλήγουμε στην ίδια λύση με τις προηγούμενες μεθόδους.

$\boxed{2}$: (α) Η κίνηση είναι μονοδιάστατη (κατακόρυφη). Έστω άξονας x με φορά προς τα κάτω και αρχή στην επιφάνεια του υγρού. Η θέση του κύβου καθορίζεται από τη θέση του κέντρου του $\vec{r} = x\hat{x}$. Ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x} = \dot{x}\hat{x}$, επιτάχυνση $\vec{a} = a\hat{x} = \dot{v}\hat{x} = \ddot{x}\hat{x}$.

Εξίσωση κίνησης:

- $ma = \rho_\kappa h^3 g$ αν ο κύβος είναι ολόκληρος έξω από το υγρό, δηλ. $x < -h/2$.
- $ma = \rho_\kappa h^3 g - \rho_\upsilon h^2 g\,(x+h/2) - \frac{1}{2}\rho_\upsilon h^2 v^2$ αν ο κύβος κατεβαίνει $v \ge 0$ και μέρος του, αλλά όχι ολόκληρος, βρίσκεται μέσα στο υγρό, δηλ. $-h/2 < x < h/2$.
- $ma = \rho_\kappa h^3 g - \rho_\upsilon h^2 g\,(x+h/2)$ αν ο κύβος ανεβαίνει $v \le 0$ (οπότε δεν υπάρχει αντίσταση από το υγρό) και μέρος του, αλλά όχι ολόκληρος, βρίσκεται μέσα στο υγρό, δηλ. $-h/2 < x < h/2$.
- $ma = \rho_\kappa h^3 g - \rho_\upsilon h^2 g h - \frac{1}{2}\rho_\upsilon h^2 v^2$ αν ο κύβος κατεβαίνει $v \ge 0$ και ολόκληρος βρίσκεται μέσα στο υγρό, δηλ. $x > h/2$.
- $ma = \rho_\kappa h^3 g - \rho_\upsilon h^2 g h + \frac{1}{2}\rho_\upsilon h^2 v^2$ αν ο κύβος ανεβαίνει $v \le 0$ και ολόκληρος βρίσκεται μέσα στο υγρό, δηλ. $x > h/2$.

Αντικαθιστώντας $m = \rho_\kappa h^3$ και $\rho_\upsilon = 2\rho_\kappa$ έχουμε

$$a = \begin{cases} g & \text{αν } x < -h/2 \\ -\dfrac{2gx}{h} - \dfrac{v^2}{h} & \text{αν } -h/2 \le x \le h/2 \text{ και } v \ge 0 \\ -\dfrac{2gx}{h} & \text{αν } -h/2 \le x \le h/2 \text{ και } v \le 0 \\ -g - \dfrac{v^2}{h} & \text{αν } x \ge h/2 \text{ και } v \ge 0 \\ -g + \dfrac{v^2}{h} & \text{αν } x \ge h/2 \text{ και } v \le 0 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας $x = hx'$, $t = \sqrt{\dfrac{h}{g}}\,t'$,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{g}}}\frac{dx'}{dt'} = \sqrt{gh}\;v',$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{h}{\left(\sqrt{\frac{h}{g}}\right)^2}\frac{d^2x'}{dt'^2} = g\;a',$$

η εξίσωση κίνησης γράφεται, διώχνοντας τους τόνους (αφού κάνουμε τις αντικαταστάσεις):

$$a = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \le -1/2 \\ -2x - v^2 & \text{αν } -1/2 \le x \le 1/2 \text{ και } v \ge 0 \\ -2x & \text{αν } -1/2 \le x \le 1/2 \text{ και } v \le 0 \\ -1 - v^2 & \text{αν } x \ge 1/2 \text{ και } v \ge 0 \\ -1 + v^2 & \text{αν } x \ge 1/2 \text{ και } v \le 0 \end{cases}$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι ίδιες με αυτές που θα προέκυπταν θέτοντας απλά $h = \rho_\kappa = g = 1$ στις αρχικές εξισώσεις.

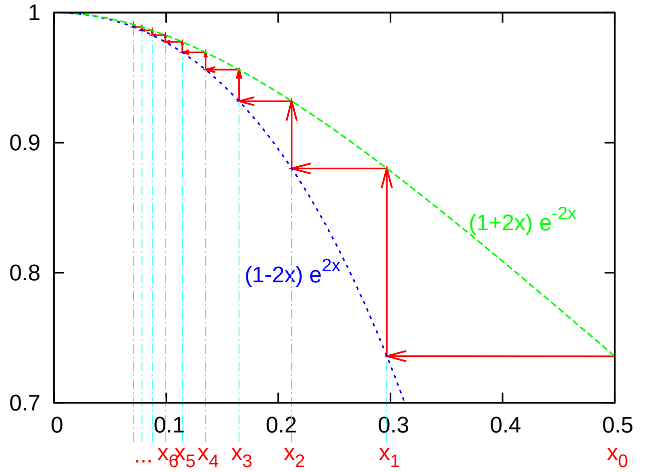
(β) Όταν αφεθεί ο κύβος από την αρχική θέση $x_0 = 1/2$ θα αρχίσει να ανεβαίνει (η άνωση είναι μεγαλύτερη του βάρους). Κατά την άνοδο ($v \le 0$) θα ισχύει $\ddot{x} = -2x$ οπότε η κίνηση είναι μέρος γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης με $\omega = \sqrt{2}$. Σε χρόνο μισής περιόδου $\pi/\omega = \pi/\sqrt{2}$ ο κύβος θα φτάσει στη θέση $x = -x_0 = -1/2$ όπου θα σταματήσει στιγμιαία. (Καθ' όλο το διάστημα αυτό ο κύβος είναι μερικά βυθισμένος, $-1/2 \le x \le 1/2$, οπότε ισχύει η σχέση της αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{x} = -2x$.)

Στη θέση $x = -1/2$ το βάρος υπερισχύει της άνωσης και ο κύβος θα αρχίσει να κατεβαίνει ακολουθώντας το νόμο $a = -2x - v^2$. Θα φτάσει σε σημείο x_1 όπου στιγμιαία θα σταματήσει. Είναι $x_1 < 1/2$ διότι λόγω της αντίστασης η κίνηση θα έχει μικρότερη έκταση από την αντίστοιχη αρμονική ταλάντωση. Στη συνέχεια θα ανέβει εκτελώντας μισή αρμονική ταλάντωση ($\ddot{x} = -2x$) και σε χρόνο $\pi/\sqrt{2}$ θα φτάσει στο σημείο $-x_1$. Στη συνέχεια θα κατέβει μέχρι σημείο x_2 ακολουθώντας την $a = -2x - v^2$, κ.ο.κ.

Για να βρούμε τα σημεία όπου σταματά ο κύβος κατεβαίνοντας πρέπει να βρούμε τη σχέση ταχύτητας με θέση. Έστω μελετούμε τη $n-$οστή κάθοδο που ξεκινά από το $x = -x_{n-1}$ και σταματά στο

$x = x_n$. Θέτουμε $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$ οπότε $v\dfrac{dv}{dx} = -2x - v^2$. Σύμφωνα με την υπόδειξη η λύση της είναι $v^2 = De^{-2x} - 2x + 1$, όπου D σταθερά ολοκλήρωσης που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Για $x = -x_{n-1}$ είναι $v = 0$, οπότε $D = -(2x_{n-1}+1)\,e^{-2x_{n-1}}$. Η ταχύτητα είναι λοιπόν $v = \sqrt{1 - 2x - (2x_{n-1}+1)\,e^{-2(x+x_{n-1})}}$ και θα μηδενιστεί στο σημείο x_n το οποίο είναι λύση της $(1-2x_n)\,e^{2x_n} = (1+2x_{n-1})\,e^{-2x_{n-1}}$.

Γνωρίζοντας το $x_0 = 1/2$ είναι $(1-2x_1)\,e^{2x_1} = 2e^{-1}$ με αριθμητική λύση $x_1 = 0.2968$. Γνωρίζοντας το x_1 είναι $(1-2x_2)\,e^{2x_2} = (1+2x_1)\,e^{-2x_1}$ με αριθμητική λύση $x_2 = 0.2120$. Όμοια προκύπτουν και οι τιμές των $x_3 = 0.1650$, $x_4 = 0.1352$, $x_5 = 0.1145$, $x_6 = 0.0993$, $x_7 = 0.0877$, $x_8 = 0.0785$, $x_9 = 0.0710$. Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια γραφική μέθοδο εύρεσης των x_n.



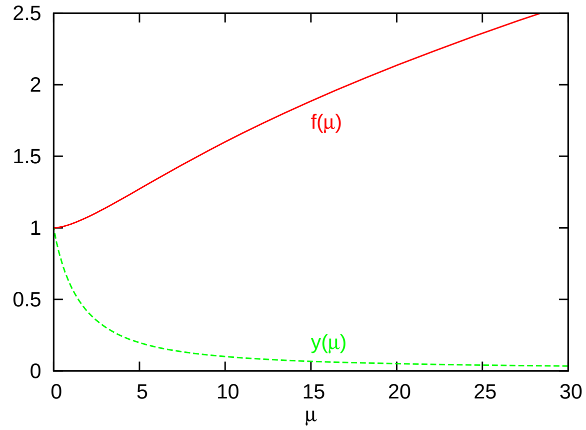
(γ) Κάθε άνοδος διαρκεί μισή περίοδο της αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{x} = -2x$, δηλ. χρόνο $\pi/\sqrt{2} = 2.2214$.

Ο χρόνος της $n-$οστής καθόδου είναι $\Delta t_n = \displaystyle\int_{-x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{v} = \int_{-x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{\sqrt{1-2x-(2x_{n-1}+1)\,e^{-2(x+x_{n-1})}}}$.

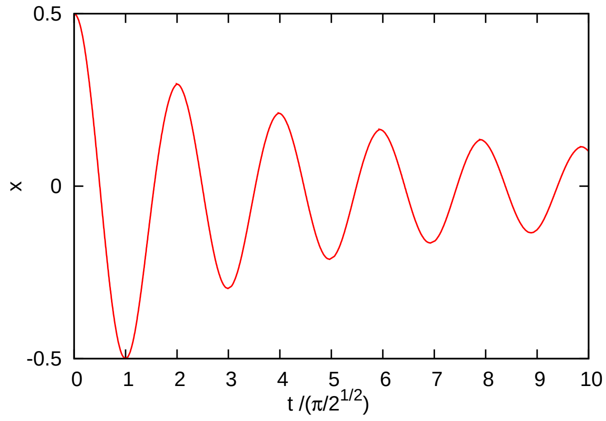
Αριθμητικά προκύπτουν οι χρόνοι 2.2786, 2.2451, 2.2345, 2.2298, 2.2272, 2.2257, 2.2247, 2.2240 για τις πρώτες οκτώ καθόδους.

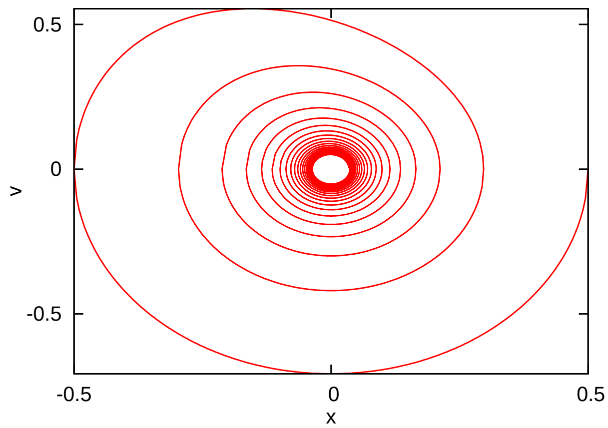
Οι χρόνοι Δt_n είναι πάντα μεγαλύτεροι από τον χρόνο $\pi/\sqrt{2} = 2.2214$ που αντιστοιχεί στην μισή ταλάντωση χωρίς αντίσταση και πλησιάζουν αυτή την τιμή σε μεγάλα n. Για να το δείξουμε αυτό, μπορούμε να βρούμε τον αντίστοιχο χρόνο για την κίνηση με $a = -\omega^2 x - \lambda v^2$ (η καθοδική κίνηση του κύβου αντιστοιχεί σε $\omega = \sqrt{2}$, $\lambda = 1$, ενώ η ταλάντωση χωρίς αντίσταση σε $\omega = \sqrt{2}$, $\lambda = 0$). Βρίσκουμε $\dfrac{\Delta t_n}{\pi/\omega} = \dfrac{\sqrt{2}\,\lambda}{\pi}\displaystyle\int_{-x_{n-1}}^{x_n}\frac{dx}{\sqrt{1-2\lambda x-(2\lambda x_{n-1}+1)\,e^{-2(\lambda x+\lambda x_{n-1})}}}$.

Αλλάζοντας μεταβλητή $x = y' x_{n-1}$ και ορίζοντας $\mu = 2\lambda x_{n-1}$ έχουμε $\dfrac{\Delta t_n}{\pi/\omega} = f(\mu) = \dfrac{\mu}{\pi\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^{y}\frac{dy'}{\sqrt{1-\mu y'-(\mu+1)e^{-\mu y'-\mu}}}$, με $y = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$ τη λύση της $(1-\mu y)e^{\mu y} = (1+\mu)e^{-\mu}$. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την λύση της εξίσωσης αυτής $y(\mu)$ καθώς και τη συνάρτηση $f(\mu)$.



(δ) Ακολουθεί το γράφημα της $x(t)$ και η καμπύλη στο διάγραμμα φάσης για την κίνηση του κύβου.





$\boxed{3}$: (α) Για τη διαδρομή A→B είναι $y = 0$, $z = 1$. Μπορούμε να γράψουμε $\vec{r} = x\hat{x} + \hat{z}$ με το x να μεταβάλλεται από $x = 0$ σε $x = 1$, $d\vec{r} = dx\hat{x}$, $\vec{F} = \dfrac{(a+1)\,x\hat{x} + (a-x^2)\,\hat{z}}{(x^2+1)^{b+1}}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{(a+1)\,x}{(x^2+1)^{b+1}}dx$, οπότε $W_{\mathrm{AB}} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(a+1)\,x}{(x^2+1)^{b+1}}dx$. Είκαι $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^{b+1}} = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{-b-1} d\left(x^2+1\right) = -\frac{1}{2b}\left(x^2+1\right)^{-b}$, άρα $W_{\rm AB} = \left[-\frac{a+1}{2b\left(x^2+1\right)^b}\right]_0^1 = \frac{a+1}{2b}\left(1-\frac{1}{2^b}\right)$.

Για τη διαδρομή Β→Γ είναι $x=1$, $z=1$, $d\vec{r} = dy\hat{y}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{(a+1)\,y}{(y^2+2)^{b+1}}dy$, οπότε $W_{\rm B\Gamma} = \int_0^1 \frac{(a+1)\,y}{(y^2+2)^{b+1}}dy = \left[-\frac{a+1}{2b\left(y^2+2\right)^b}\right]_0^1 = \frac{a+1}{2b}\left(\frac{1}{2^b}-\frac{1}{3^b}\right)$.

Για τη διαδρομή Γ→Δ είναι $y=1$, $z=1$, $d\vec{r} = dx\hat{x}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{(a+1)\,x}{(x^2+2)^{b+1}}dx$, οπότε $W_{\Gamma\Delta} = \int_1^0 \frac{(a+1)\,x}{(x^2+2)^{b+1}}dx = -W_{\rm B\Gamma} = -\frac{a+1}{2b}\left(\frac{1}{2^b}-\frac{1}{3^b}\right)$.

Για τη διαδρομή Δ→Α είναι $x=0$, $z=1$, $d\vec{r} = dy\hat{y}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{(a+1)\,y}{(y^2+1)^{b+1}}dy$, οπότε $W_{\Delta\rm A} = \int_1^0 \frac{(a+1)\,y}{(y^2+1)^{b+1}}dy = -W_{\rm AB} = -\frac{a+1}{2b}\left(1-\frac{1}{2^b}\right)$.

Το συνολικό έργο για την κλειστή διαδρομή είναι $W_{\rm AB\Gamma\Delta} = W_{\rm AB}+W_{\rm B\Gamma}+W_{\Gamma\Delta}+W_{\Delta\rm A} = 0$.

(β) Η δύναμη είναι συντηρητική αν υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x,y,z)$ τέτοια ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{(a+1)\,zx}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}} & ① \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -\dfrac{(a+1)\,zy}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}} & ② \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{x^2+y^2-az^2}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}} & ③ \end{cases}$$

$① \rightsquigarrow V(x,y,z) = -\left[\int \frac{(a+1)\,zxdx}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}}\right]_{y,z\ \text{σταθερά}} = -\frac{(a+1)\,z}{2}\int \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-b-1} d\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow$

$V(x,y,z) = \frac{(a+1)\,z}{2b\left(x^2+y^2+z^2\right)^b} + \mathcal{C}(y,z)$

Αντικαθιστώντας στην $② \rightsquigarrow \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}(z)$, δηλ. $V(x,y,z) = \frac{(a+1)\,z}{2b\left(x^2+y^2+z^2\right)^b} + \mathcal{C}(z)$.

Αντικαθιστώντας στην $③ \rightsquigarrow \frac{d\mathcal{C}}{dz} = \frac{1-\frac{a+1}{2b}}{(x^2+y^2+z^2)^b}$.

Το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση του z ενώ το δεξί μέλος είναι συνάρτηση του $x^2+y^2+z^2$. Αφού οι μεταβλητές z και $x^2+y^2+z^2$ είναι ανεξάρτητες πρέπει $a+1=2b$ και $\mathcal{C} =$ σταθερά.

Επομένως η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική αν $a = 2b-1$ και η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι $V(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^b} +$ σταθερά.

Το αν η $\vec{F}$ είναι συντηρητική θα μπορούσε να ελεγχθεί μέσω του στροβιλισμού της. Πράγματι $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{(a+1)\,zx}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}} & \dfrac{(a+1)\,zy}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}} & \dfrac{az^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}} \end{vmatrix} = \frac{(2b-a-1)\left(y\hat{x}-x\hat{y}\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{b+1}}$ και είναι $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ μόνο αν $a = 2b-1$. Αν ακολουθούσαμε αυτό τον τρόπο, στη συνέχεια θα έπρεπε να βρούμε την συνάρτηση V από τη σχέση $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ όπως παραπάνω. Η μόνη διαφορά είνα ότι τώρα γνωρίζουμε ότι υπάρχει σίγουρα λύση για $a = 2b-1$, κάτι που μας εξασφαλίζει ο μηδενισμός του στροβιλισμού της $\vec{F}$. Αυτός ο έλεγχος μπορεί να παραληφθεί, αφού η ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ είναι ταυτόχρονα και απόδειξη ότι η δύναμη είναι συντηρητική.

(γ) Σε κυλινδρικές $x^2+y^2 = \varpi^2$, $x\hat{x}+y\hat{y} = \varpi\hat{\varpi}$, οπότε $\vec{F} = \frac{(a+1)\,z\varpi\hat{\varpi} + \left(az^2-\varpi^2\right)\hat{z}}{(\varpi^2+z^2)^{b+1}}$.

Σε σφαιρικές $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, $\hat{x} = (\hat{x}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{x}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \sin\theta\cos\phi\ \hat{r} + \cos\theta\cos\phi\ \hat{\theta} - \sin\phi\ \hat{\phi}$, $\hat{y} = (\hat{y}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{y}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{y}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \sin\theta\sin\phi\ \hat{r} + \cos\theta\sin\phi\ \hat{\theta} + \cos\phi\ \hat{\phi}$, $\hat{z} = (\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{z}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{z}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} = \cos\theta\ \hat{r} - \sin\theta\ \hat{\theta}$, οπότε $\vec{F} = \frac{a\cos\theta\ \hat{r} + \sin\theta\ \hat{\theta}}{r^{2b}}$.

Η έκφραση της δύναμης είναι απλούστερη στις σφαιρικές συντεταγμένες. Θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στο ερώτημα (β) χρησιμοποιώντας αυτή την έκφραση, δηλ. να ψάξουμε για συνάρτηση $V(r,\theta,\phi)$ τέτοια ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{a\cos\theta}{r^{2b}} & ④ \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = -\dfrac{\sin\theta}{r^{2b}} & ⑤ \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\phi} = 0 & ⑥ \end{cases}$$

$⑥ \rightsquigarrow V = V(r,\theta)$.

$⑤ \rightsquigarrow V = \frac{\cos\theta}{r^{2b-1}} + \mathcal{C}(r)$ και με αντικατάσταση στην $④ \rightsquigarrow \frac{d\mathcal{C}}{dr} = (2b-1-a)\frac{\cos\theta}{r^{2b}}$, οπότε συμπεραίνουμε ότι πρέπει $a = 2b-1$ και $\mathcal{C} =$ σταθερά. Επομένως η δύναμη είναι συντηρητική για $a = 2b-1$ και η δυναμική ενέργεια είναι $V = \frac{\cos\theta}{r^a} +$ σταθερά (αποτέλεσμα ίδιο με το $V(x,y,z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^b} +$ σταθερά).

$\boxed{4}$: (α_1) Μια βολική παραμετρική γραφή της διαδρομής είναι σε σφαιρικές (η επιλογή των σφαιρικών

βολεύει και για το λόγο ότι η δύναμη είναι δοσμένη σε σφαιρικές) $x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$, $z = 0$, με $\phi \in (0, \pi/2)$. Είναι $\vec{r} = \cos\phi\ \hat{x} + \sin\phi\ \hat{y}$, $d\vec{r} = (-\sin\phi\ \hat{x} + \cos\phi\ \hat{y})d\phi = d\phi\ \hat{\phi}$
Το ίδιο προκύπτει χρησιμοποιώντας το $d\vec{r} = dr\ \hat{r} + rd\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\ \hat{\phi}$ των σφαιρικών, πάνω στην καμπύλη $r = 1$, $\theta = \pi/2$.
$\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. Άρα $W_{\rm AB} = 0$.
(α$_2$) $x = 0$, $y = \sin\theta$, $z = \cos\theta$, με το θ να μεταβάλλεται από $\pi/2$ στο σημείο B, σε 0 στο σημείο C. Είναι $\vec{r} = \sin\theta\ \hat{y} + \cos\theta\ \hat{z}$, $d\vec{r} = (\cos\theta\ \hat{y} - \sin\theta\ \hat{z})d\theta = d\theta\ \hat{\theta}$.
Το ίδιο προκύπτει χρησιμοποιώντας το $d\vec{r} = dr\ \hat{r} + rd\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\ \hat{\phi}$ των σφαιρικών, πάνω στην καμπύλη $r = 1$, $\phi = \pi/2$.
$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \sin\theta\ d\theta$. Άρα $W_{\rm BC} = \displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \sin\theta\ d\theta = -1$.
(α$_3$) $x = \sin\theta$, $y = 0$, $z = \cos\theta$, με το θ να μεταβάλλεται από 0 στο σημείο C, σε $\pi/2$ στο A. Είναι $\vec{r} = \sin\theta\ \hat{x} + \cos\theta\ \hat{z}$, $d\vec{r} = (\cos\theta\ \hat{x} - \sin\theta\ \hat{z})d\theta = d\theta\ \hat{\theta}$.
Το ίδιο προκύπτει χρησιμοποιώντας το $d\vec{r} = dr\ \hat{r} + rd\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\ \hat{\phi}$ των σφαιρικών, πάνω στην καμπύλη $r = 1$, $\phi = 0$.
$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \sin\theta\ d\theta$. Άρα $W_{\rm CA} = \displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin\theta\ d\theta = 1$.
(α$_4$) Αν διαλέξουμε να περιγράψουμε την τροχιά σε σφαιρικές (κάτι που βολεύει αφού η δύναμη δίνεται σε σφαιρικές), η εξίσωσή της είναι
$\underbrace{r\cos\theta}_{z} = 1 - \underbrace{r\sin\theta\cos\phi}_{x}, \underbrace{r\sin\theta\sin\phi}_{y} = 0$, δηλ.
$r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$, $\phi = 0$, με το θ να μεταβάλλεται από 0 στο σημείο C, σε $\pi/2$ στο σημείο A.
$d\vec{r} = dr\ \hat{r} + rd\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\ \hat{\phi} =$
$\left[\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)\hat{r} + \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\hat{\theta}\right] d\theta =$
$\left[\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}\hat{r} + \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\hat{\theta}\right] d\theta$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} =$
$\left[a\cos\theta\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) + \sin\theta\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2\right] d\theta$.
Γράφοντας $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta - 1$ και $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ βρίσκουμε $W_{\rm CA} =$
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} a\left(2\sin^2\theta - 1\right)\underbrace{\cos\theta d\theta}_{d\sin\theta} + 2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\underbrace{\cos\theta d\theta}_{d\sin\theta}$
$\displaystyle + \int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = \frac{5-a}{3}$.
Αν διαλέγαμε καρτεσιανές, θα εκφράζαμε το $\vec{r} = x\hat{x} + (1-x)\hat{z}$, $d\vec{r} = (\hat{x} - \hat{z})dx$,
$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{a\cos\theta}{r^3}\hat{r}\cdot(\hat{x}-\hat{z})dx + \dfrac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\cdot(\hat{x}-\hat{z})dx$. Με $\hat{r}\cdot\hat{x} = \sin\theta$ (διότι $\phi = 0$), $\hat{r}\cdot\hat{z} = \cos\theta$, $\hat{\theta}\cdot\hat{x} = \cos\theta$, $\hat{\theta}\cdot\hat{z} = -\sin\theta$, $\cos\theta = \dfrac{z}{r} = \dfrac{1-x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} = \dfrac{x}{r}$ (διότι $x \geq 0$), $r = \sqrt{x^2 + (1-x)^2}$, βρίσκουμε $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{a(-2x^2+3x-1)+x}{(2x^2-2x+1)^{5/2}}dx$ και $W_{\rm CA} = \displaystyle\int_0^1 \frac{a(-2x^2+3x-1)+x}{(2x^2-2x+1)^{5/2}}dx \overset{\xi=2x-1}{=\!=\!=}$
$\displaystyle -a\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(\xi^2+1)^{3/2}} + (a+1)\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi d\xi}{(\xi^2+1)^{5/2}} + (a+1)\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(\xi^2+1)^{5/2}}$. Το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(\xi^2+1)^{3/2}} \overset{\xi=\tan w}{=\!=\!=} \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos w dw = \sqrt{2}$. Όμοια $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(\xi^2+1)^{5/2}} \overset{\xi=\tan w}{=\!=\!=}$
$\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^3 w dw = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1-\sin^2 w\right)\underbrace{\cos w dw}_{d\sin w} =$
$\displaystyle\left[\sin w - \frac{\sin^3 w}{3}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$, ενώ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\xi d\xi}{(\xi^2+1)^{5/2}} =$ 0 (ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε διάστημα συμμετρικό γύρω από το 0). Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $W_{\rm CA} = \dfrac{5-a}{3}$.
(α$_5$) Για τη διαδρομή $C \to O$ είναι $\theta = 0$, $d\vec{r} = dr\hat{r}$, $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \dfrac{a}{r^3}dr$ και το έργο $W_{\rm CO} = \displaystyle\int_1^0 \frac{a}{r^3}dr = \left[-\frac{a}{2r^2}\right]_1^0$ απειρίζεται. Το αποτέλεσμα αυτό βέβαια δεν είναι αποδεκτό. Ο απειρισμός της δύναμης στο $r = 0$ οδηγεί στον απειρισμό του έργου. Αν θέλουμε να περιγράψουμε σωστά την κίνηση κοντά το $r = 0$ πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί στην περιγραφή της δύναμης.
Ένα απλούστερο παράδειγμα με απειρισμό τέτοιου είδους είναι η κίνηση μάζας m σε βαρυτικό πεδίο μάζας M η οποία βρίσκεται στο $r = 0$. Η δύναμη είναι $-\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$ και ο απειρισμός της στο $r = 0$ δίνει επίσης απειρισμούς στο έργο για κίνηση που π.χ. καταλήγει στο $r = 0$. Η σωστή έκφραση όμως της δύναμης δεν απειρίζεται στο $r = 0$. Για να τη βρούμε πρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο της M στο εσωτερικό της και το αποτέλεσμα δεν απειρίζεται (π.χ. αν η κατανομή της μάζας M είναι σφαιρικά συμμετρική προκύπτει μηδενική δύναμη στο κέντρο της).
Ένας τρόπος να παρακάμψουμε το πρόβλημα είναι να τροποποιήσουμε τη διαδρομή κοντά στο σημείο απειρισμού. Έστω στο συγκεκριμένο πρόβλημα ότι το σώμα ξεκινά από το C, κινείται ευθύγραμμα μέχρι το σημείο O$'(x = 0, y = 0, z = \epsilon)$ με $\epsilon \to 0^+$, εκτελεί μια τροχιά τεταρτοκυκλίου ακτίνας ϵ μέχρι το σημείο O$''(x = \epsilon, y = 0, z = 0)$ και στη συνέχεια κινείται ευθύγραμμα μέχρι το σημείο A.
Στο πρώτο τμήμα $W_{\rm CO'} = \left[-\dfrac{a}{2r^2}\right]_1^{\epsilon} = \dfrac{a}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\epsilon^2}\right)$.
Στο δεύτερο τμήμα $r = \epsilon$, $\phi = 0$, $d\vec{r} = \epsilon d\theta\ \hat{\theta}$,

$W_{\mathrm{O'O''}} = \int_{\mathrm{O'}}^{\mathrm{O''}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\epsilon^2} d\theta = \frac{1}{\epsilon^2}$. Στο τρίτο τμήμα $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $d\vec{r} = dr\hat{r}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ και άρα $W_{\mathrm{O''A}} = 0$. Το συνολικό έργο είναι $W_{\mathrm{CA}} = W_{\mathrm{CO'}} + W_{\mathrm{O'O''}} + W_{\mathrm{O''A}} = \frac{a}{2} + \frac{2-a}{2\epsilon^2}$. Ο απειρισμός αποφεύγεται για $a = 2$.

(α_6) Για τη διαδρομή $C \to D$ είναι $\theta = 0$, $d\vec{r} = dr\hat{r}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{a}{r^3}dr$ και το έργο $W_{\mathrm{CD}} = \int_1^\infty \frac{a}{r^3}dr = \left[-\frac{a}{2r^2}\right]_1^\infty = \frac{a}{2}$.

Στο τμήμα DE είναι $\vec{F} = 0$ (αφού $R \to \infty$), οπότε $W_{\mathrm{DE}} = 0$.

Στο τμήμα EA είναι $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$, $d\vec{r} = dr\hat{r}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, οπότε $W_{\mathrm{EA}} = 0$.

Το συνολικό έργο είναι $W_{\mathrm{CA}} = \frac{a}{2}$.

(β) Αν η δύναμη είναι συντηρητική πρέπει το έργο της σε οποιαδήποτε διαδρομή να εξαρτάται μόνο από τα άκρα της και όχι το σχήμα της. Στα ερωτήματα (α_3) και (α_4) έχουμε υπολογίσει το έργο σε δύο διαδρομές από το C στο A. Αυτά είναι ίσα μόνο αν $a = 2$. Επομένως για αυτή την τιμή της a ενδέχεται η δύναμη να είναι συντηρητική.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από την απάντηση στο ερώτημα (α_5), το οποίο δείχνει ότι το έργο είναι πεπερασμένο μόνο για $a = 2$ (υπάρχουν σίγουρα διαδρομές από το C στο A στις οποίες το έργο δεν απειρίζεται). Όμοια, αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του (α_5) και (α_6).

Η δύναμη είναι υποπερίπτωση της δύναμης της άσκησης $\boxed{3}$, για $b = 3/2$. Στην άσκηση εκείνη δείξαμε ότι η δύναμη είναι συντηρητική αν $a = 2b - 1 = 2$, με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας (για $a = 2$, $b = 3/2$) $V = \frac{\cos\theta}{r^2}$, θεωρώντας μηδενική την αυθαίρετη προσθετική σταθερά.

Η τιμή της δυναμικής ενέργειας στα διάφορα σημεία:
$V_{\mathrm{A}} = V(r = 1, \theta = \pi/2) = 0$,
$V_{\mathrm{B}} = V(r = 1, \theta = \pi/2) = 0$,
$V_{\mathrm{C}} = V(r = 1, \theta = 0) = 1$,
$V_{\mathrm{O'}} = V(r = \epsilon, \theta = 0) = 1/\epsilon^2$,
$V_{\mathrm{O''}} = V(r = \epsilon, \theta = \pi/2) = 0$,
$V_{\mathrm{D}} = \lim_{R\to\infty} V(r = R, \theta = 0) = 0$.
$V_{\mathrm{E}} = \lim_{R\to\infty} V(r = R, \theta = \pi/2) = 0$,
ενώ στο σημείο Ο η τιμής της είναι απροσδιόριστη (λόγω και της εξάρτησης από το θ).

Έτσι προκύπτουν τα έργα:
$W_{\mathrm{AB}} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} = 0$,
$W_{\mathrm{BC}} = V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{C}} = -1$,
$W_{\mathrm{CA}} = V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{A}} = 1$,
$W_{\mathrm{CO'}} = V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{O'}} = 1 - 1/\epsilon^2$,
$W_{\mathrm{O'O''}} = V_{\mathrm{O'}} - V_{\mathrm{O''}} = 1/\epsilon^2$,
$W_{\mathrm{O''A}} = V_{\mathrm{O''}} - V_{\mathrm{A}} = 0$,
$W_{\mathrm{CD}} = V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}} = 1$,
$W_{\mathrm{DE}} = V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{E}} = 0$,
$W_{\mathrm{EA}} = V_{\mathrm{E}} - V_{\mathrm{A}} = 0$.

$\boxed{5}$: Η θέση του δαχτυλιδιού είναι $\vec{r} = r\cos\phi\ \hat{x} + r\sin\phi\ \hat{y} = \cos^2\phi\ \hat{x} + \sin\phi\cos\phi\ \hat{y}$.
Το σύρμα είναι κυκλικό, αφού απαλείφοντας το ϕ από τις $x = \cos^2\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\phi)$, $y = \sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin(2\phi)$ βρίσκουμε $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, εξίσωση κύκλου με κέντρο το $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$.
Η ταχύτητά του $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -2\sin\phi\cos\phi\dot{\phi}\ \hat{x} + \left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)\dot{\phi}\ \hat{y} = [-\sin(2\phi)\ \hat{x} + \cos(2\phi)\ \hat{y}]\,\dot{\phi}$.
Αρχικά $\phi = 0$ και το σώμα θα αρχίσει να κινείται προς μεγαλύτερα ϕ λόγω της $\vec{F}|_{t=0} = \hat{y}$. Είναι $|\vec{v}| = |\dot{\phi}| = \dot{\phi}$ για $\dot{\phi} \geq 0$ και $\hat{t} = \vec{v}/|\vec{v}| = -\sin(2\phi)\ \hat{x} + \cos(2\phi)\ \hat{y}$.
Τα ίδια προκύπτουν αν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} = \left(-\sin\phi\ \hat{r} + \cos\phi\ \hat{\phi}\right)\dot{\phi}$.

(α) Στο δαχτυλίδι ασκούνται δυο δυνάμεις, η κάθετη αντίδραση από το σύρμα $\vec{N}$ και η δύναμη $\vec{F}$. Το μέτρο της ταχύτητας μπορεί να βρεθεί από θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας. Είναι $W_N = 0$ (η $\vec{N}$ κάθετη στην κίνηση) ενώ η εύρεση του W_F θα απλοποιηθεί αν η $\vec{F}$ είναι συντηρητική. Ψάχνουμε για συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -2xy & ① \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -x^2 & ② \end{cases}$$

$$① \rightsquigarrow V(x, y) = -\left[\int 2xy dx\right]_{y\ \text{σταθερό}} = -x^2 y + \mathcal{C}(y)$$

Αντικαθιστώντας στην ② $\rightsquigarrow \mathcal{C} =$ σταθερά. Επομένως η $\vec{F}$ είναι συντηρητική και η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι, μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά, $V(x, y) = -x^2 y$.

Στην αρχική θέση $\phi = 0$ είναι $x = 1$, $y = 0$ οπότε $V(\phi = 0) = 0$ και αφού το δαχτυλίδι είναι ακίνητο (μηδενική κινητική ενέργεια) η ολική του ενέργεια είναι $E = 0$. Στη θέση ϕ όπου $x = \cos^2\phi$, $y = \sin\phi\cos\phi$ είναι $V(\phi) = -\cos^5\phi\sin\phi$. Το έργο $W_F = V(0) - V(\phi) = \cos^5\phi\sin\phi$ αλλάζει την κινητική ενέργεια από 0 σε $\frac{mv^2}{2} = W_F = \cos^5\phi\sin\phi \Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}$. (Το ίδιο προκύπτει από διατήρηση ενέργειας $\frac{mv^2}{2} + V = E$.)

Η ταχύτητα είναι λοιπόν $\vec{v} = \sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}\ \hat{t}$, με $\hat{t} = -\sin(2\phi)\ \hat{x} + \cos(2\phi)\ \hat{y}$.

Ένας δεύτερος τρόπος να λυθεί η άσκηση είναι να βρούμε άμεσα το έργο της δύναμης $\vec{F}$ χωρίς να δείξουμε ότι είναι συντηρητική: Αφού $\vec{r} = r\cos\phi\ \hat{x}+$

$r\sin\phi\ \hat{y} = \cos^2\phi\ \hat{x} + \sin\phi\cos\phi\ \hat{y}$ είναι $d\vec{r} = \left[-2\sin\phi\cos\phi\ \hat{x} + \left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)\hat{y}\right]d\phi$ οπότε $\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\cos^6\phi - 5\sin^2\phi\cos^4\phi\right)d\phi$ και $W_F = \int_0^\phi \left(\cos^6\phi - 5\cos^4\phi\sin^2\phi\right)d\phi = \cos^5\phi\sin\phi$. Το W_F ισούται με την κινητική ενέργεια $mv^2/2$.

Ένας τρίτος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν την εξίσωση Νεύτωνα $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}$. Είναι $\vec{r} = \cos^2\phi\ \hat{x} + \sin\phi\cos\phi\ \hat{y}$, $\vec{v} = [-\sin(2\phi)\ \hat{x} + \cos(2\phi)\ \hat{y}]\,\dot{\phi}$, $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = [-\sin(2\phi)\ \hat{x} + \cos(2\phi)\ \hat{y}]\,\ddot{\phi} - 2\left[\cos(2\phi)\ \hat{x} + \sin(2\phi)\ \hat{y}\right](\dot{\phi})^2$. (Το πρώτο μέρος είναι η επιτρόχια και το δεύτερο η κεντρομόλος συνιστώσες της επιτάχυνσης.) Η δύναμη $\vec{F} = 2xy\hat{x} + x^2\hat{y} = 2\cos^3\phi\sin\phi\ \hat{x} + \cos^4\phi\ \hat{y}$. Για να διώξουμε την $\vec{N}$ πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά με το $\hat{t} = \vec{v}/|\vec{v}|$ (ή ισοδύναμα αναλύουμε την εξίσωση του Νεύτωνα στις $\hat{t}$ και $\hat{n}$ διευθύνσεις, με $\hat{n} = \hat{z}\times\hat{t}$):

$\ddot{\phi} = -2\cos^3\phi\sin\phi\sin(2\phi) + \cos^4\phi\cos(2\phi) \Leftrightarrow$

$\ddot{\phi} = \cos^6\phi - 5\cos^4\phi\sin^2\phi$. Με $\dot{\phi} = v$ και $\ddot{\phi} = v\dfrac{dv}{d\phi}$ προκύπτει $v\dfrac{dv}{d\phi} = \cos^6\phi - 5\cos^4\phi\sin^2\phi \Leftrightarrow$

$\int_0^v v dv = \int_0^\phi \left(\cos^6\phi - 5\cos^4\phi\sin^2\phi\right)d\phi \Leftrightarrow$

$\dfrac{v^2}{2} = \cos^5\phi\sin\phi \overset{v\geq 0}{\Leftrightarrow} v = \sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}$.

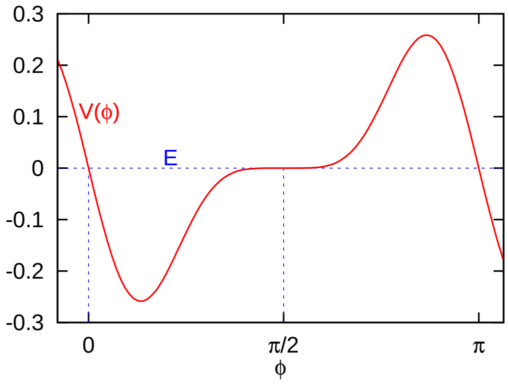
(β) Από $|\vec{v}| = \sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}$ και $|\vec{v}| = \dot{\phi}$ έχουμε $\dfrac{d\phi}{dt} = \sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi} \Leftrightarrow \int_0^\phi \dfrac{d\phi}{\sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}} = \int_0^t dt \Leftrightarrow t = \int_0^\phi \dfrac{d\phi}{\sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}}$.

Το ίδιο προκύπτει από διατήρηση ενέργειας $\dfrac{mv^2}{2} + V(\phi) = E \overset{v=\dot{\phi}\geq 0}{\Longleftrightarrow} \dot{\phi} = \sqrt{2\left[E - V(\phi)\right]}$ αντικαθιστώντας $E = 0$ και $V(\phi) = -\cos^5\phi\sin\phi$.

(γ) Η δύναμη που ασκεί το σύρμα στο δαχτυλίδι θα βρεθεί από το νόμο Νεύτωνα $\vec{N} = m\vec{a} - \vec{F}$. Η δύναμη $\vec{F} = 2xy\hat{x} + x^2\hat{y} = 2\cos^3\phi\sin\phi\ \hat{x} + \cos^4\phi\ \hat{y}$ και η επιτάχυνση θα βρεθεί παραγωγίζοντας την ταχύτητα. Έχουμε βρει $\vec{v} = \dot{\phi}\ \hat{t}$ με $\dot{\phi} = \sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}$ και $\hat{t} = -\sin(2\phi)\ \hat{x} + \cos(2\phi)\ \hat{y}$. Άρα $\vec{a} = \dot{v} = \left(\cos^6\phi - 5\cos^4\phi\sin^2\phi\right)[-\sin(2\phi)\ \hat{x} + \cos(2\phi)\ \hat{y}] + 4\cos^5\phi\sin\phi\,[-\cos(2\phi)\ \hat{x} - \sin(2\phi)\ \hat{y}]$. Αντικαθιστώντας προκύπτει $\vec{N} = 2\sin\phi\cos^2\phi\left(5\cos^2\phi - 1\right)\hat{n}$, όπου $\hat{n} = -\cos(2\phi)\ \hat{x} - \sin(2\phi)\ \hat{y}$. (Όπως περιμέναμε η $\vec{N}$ είναι κάθετη στο $\hat{t}$, $\hat{t}\cdot\vec{N} = 0$.)

Το ίδιο προκύπτει αν προβάλουμε την εξίσωση Νεύτωνα πάνω στο μοναδιαίο $\hat{n} = \hat{z}\times\hat{t}$ κάθετα στην κίνηση.

(δ) Από το διάγραμμα της $V(\phi)$ που ακολουθεί βλέπουμε ότι τα όρια κίνησης είναι τα $\phi = 0$ και $\phi = \pi/2$ (αφού η ενέργεια είναι $E = 0$ και από $\dfrac{mv^2}{2} + V(\phi) = E$ έχουμε $V(\phi) \leq E$).



Το δαχτυλίδι ξεκινά από το $\phi = 0$ και προχωρά προς το $\phi = \pi/2$ όπου η ταχύτητά του θα μηδενιστεί ξανά. Αφού στο $\phi = \pi/2$ και η ταχύτητα και η «δύναμη» $-\dfrac{dV}{d\phi}$ είναι μηδέν (το $\phi = \pi/2$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας), το σώμα θα χρειαστεί άπειρο χρόνο να φτάσει στο $\phi = \pi/2$.[3]

Αυτό δείχνει ότι σε όλη την κίνηση (και όχι μόνο στο αρχικό στάδιο) ισχύει $\dot{\phi} \geq 0$ και επίσης ότι η εξίσωση του σύρματος σε πολικές $r = \cos\phi$ είναι καλώς ορισμένη αφού πάντα ισχύει $0 \leq \phi \leq \pi/2$ και άρα $r \geq 0$.

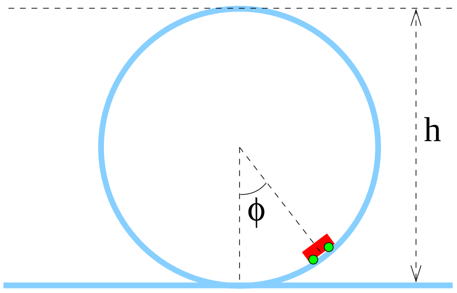
Το ότι ο χρόνος κίνησης από το $\phi = 0$ στο $\phi = \pi/2$ είναι άπειρος φαίνεται και από την σχέση μεταξύ $t - \phi$ που έχουμε βρει. Ο χρόνος αυτός είναι $t_{0\to\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \dfrac{d\phi}{\sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}} = \infty$. Ένας τρόπος για να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει είναι να εξετάσουμε τη συνεισφορά μιας μικρής περιοχής γύρω από το $\phi = \pi/2$ όπου ο παρονομαστής μηδενίζεται:[4] Για $\phi \approx \pi/2$ είναι $\cos^5\phi\sin\phi = \sin^5\left(\dfrac{\pi}{2} - \phi\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \phi\right) \approx \left(\dfrac{\pi}{2} - \phi\right)^5$ και άρα

[3] Από τη διατήρηση ενέργειας προκύπτει ότι κοντά σε σημείο $\phi = \phi_0$ είναι $\dot{\phi} = \sqrt{2\left[E - V(\phi)\right]}$. Στα σημεία μηδενισμού της ταχύτητας είναι $E - V(\phi_0) = 0$. Αν η «δύναμη» $-V'(\phi_0) \neq 0$ η ταχύτητα καθώς το ϕ πλησιάζει την τιμή ϕ_0 πέφτει στο μηδέν σαν $\dot{\phi} \approx \sqrt{-2V'(\phi_0)\,(\phi - \phi_0)}$ και ο χρόνος $\int^{\phi_0} \dfrac{d\phi}{\dot{\phi}}$ είναι πεπερασμένος. Αν όμως $-V'(\phi_0) = 0$ η ταχύτητα πέφτει στο μηδέν σαν $\dot{\phi} \approx \sqrt{-V''(\phi_0)\,(\phi - \phi_0)^2}$ (ή ακόμα πιο γρήγορα αν $V''(\phi_0) = 0$) και ο χρόνος $\int^{\phi_0} \dfrac{d\phi}{\dot{\phi}}$ είναι άπειρος.

[4] Ο παρονομαστής μηδενίζεται και γύρω από το άλλο άκρο της τροχιάς $\phi = 0$, όμως σε αυτό το σημείο η «δύναμη» -$\dfrac{dV}{d\phi}$ δεν μηδενίζεται οπότε το ολοκλήρωμα $\int_0^\epsilon \dfrac{d\phi}{\sqrt{2\left[E - V(\phi)\right]}} = \int_0^\epsilon \dfrac{d\phi}{\sqrt{2\left[E - V(0) - V'(0)\phi\right]}} = \int_0^\epsilon \dfrac{d\phi}{\sqrt{2\phi}} = \sqrt{2\epsilon}$ δεν απειρίζεται.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}} > \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\cos^5\phi\sin\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)^{-5/2} d\phi = \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)^{3/2}}\right]_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} = +\infty.$$

$\boxed{6}$: (α) Στο ανώτερο σημείο ασκείται μόνο το βάρος. Άρα $\frac{mv_{\rm top}^2}{R} = mg \Leftrightarrow v_{\rm top} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$.



Η υψομετρική διαφορά μεταξύ της θέσης ϕ και του ανώτερου σημείου είναι $R + R\cos\phi$. Άρα $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_{\rm top}^2}{2} = mg(R + R\cos\phi) \Leftrightarrow v = \sqrt{gh\left(\frac{3}{2}+\cos\phi\right)}$.
Κεντρομόλος επιτάχυνση $a_\kappa = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow$
$a_\kappa = (3 + 2\cos\phi)\, g$.
Επιτρόχια επιτάχυνση $ma_\varepsilon = m\vec{g}\cdot\hat{\phi} \Leftrightarrow$
$a_\varepsilon = -g\sin\phi$.
Ολική επιτάχυνση $a = \sqrt{a_\kappa^2 + a_\varepsilon^2} \Leftrightarrow$
$a = g\sqrt{3\cos^2\phi + 12\cos\phi + 10}$.
Η μέγιστη τιμή της a αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του $\cos\phi = 1 \Leftrightarrow \phi = 0$. Άρα $a_{\max} = 5g$ στην κατώτερη θέση.
(β) Έστω η τροχιά έχει παραμετρική εξίσωση $x = x(s)$, $y = y(s)$, όπου s το μήκος πάνω στην καμπύλη.
Το εφαπτομενικό μοναδιαίο $\hat{t} = x'\hat{x} + y'\hat{y}$ όπου οι τόνοι σημαίνουν παράγωγο ως προς s. Ισχύει $x'^2 + y'^2 = 1 \Leftrightarrow (dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2$ αφού το s είναι το μήκος πάνω στην καμπύλη.
Η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$.
Είναι $x(0) = y(0) = 0$, $y(s_{\rm top}) = h$, $y'(0) = y'(s_{\rm top}) = 0$ (που σημαίνει ότι για $s = 0$ και $s = s_{\rm top}$ το ύψος y είναι ακρότατο).
Το μοναδιαίο προς το κέντρο καμπυλότητας $\hat{n}$ ικανοποιεί την $\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\hat{n}}{\mathcal{R}}$ όπου $\mathcal{R}$ η ακτίνα καμπυλότητας.
Αφού $\frac{d\hat{t}}{ds} = x''\hat{x} + y''\hat{y}$ βρίσκουμε $\frac{1}{\mathcal{R}} = \sqrt{x''^2 + y''^2}$ και $\hat{n} = \frac{x''\hat{x} + y''\hat{y}}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}$.
Από διατήρηση ενέργειας, αν $v_{\rm top}$ είναι η ταχύτητα στο μέγιστο ύψος $y = h$, σε κάθε ύψος y βρίσκουμε $\frac{v^2}{2} + gy = \frac{v_{\rm top}^2}{2} + gh \Leftrightarrow v = \sqrt{v_{\rm top}^2 + 2g(h-y)}$.
Παραγωγίζοντας βρίσκουμε την επιτρόχια επιτάχυνση $a_\varepsilon = \dot{v} = -\frac{g\dot{y}}{v} = -gy'$ (διότι $\dot{y} = y'\dot{s} = y'v$).
Το ίδιο προκύπτει από την προβολή του βάρους $-mg\hat{y}$ πάνω στο $\hat{t}$ (απουσία τριβών το βάρος είναι η μόνη δύναμη που έχει συνιστώσα πάνω στο $\hat{t}$), $ma_\varepsilon = -mgy' \Leftrightarrow a_\varepsilon = -gy'$.
Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $a_\kappa = \frac{v^2}{\mathcal{R}} = \left[v_{\rm top}^2 + 2g(h-y)\right]\sqrt{x''^2 + y''^2}$.
Η συνθήκη ότι στο ανώτερο ύψος $y = h$ η μόνη δύναμη που ασκείται στο τρενάκι είναι το βάρος, δίνει $a_\kappa|_{y=h} = g \Leftrightarrow v_{\rm top}^2 = \frac{g}{\left.\sqrt{x''^2 + y''^2}\right|_{y=h}}$.
Επομένως η ολική επιτάχυνση είναι $a = \sqrt{a_\kappa^2 + a_\varepsilon^2} \Leftrightarrow$

$$\frac{a}{g} = \sqrt{\left[\frac{1}{\left.\sqrt{x''^2 + y''^2}\right|_{y=h}} + 2(h-y)\right]^2 (x''^2 + y''^2) + y'^2}.$$

Εφαρμογή για κλωθοειδή καμπύλη:

$$x = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right) ds, \quad y = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right) ds,$$

$$x' = \cos\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right), \quad y' = \sin\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right),$$

$$x'' = -\frac{2\pi s}{s_{\rm top}^2}\sin\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right), \quad y'' = \frac{2\pi s}{s_{\rm top}^2}\cos\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right).$$

Το ότι $x'^2 + y'^2 = 1 \Leftrightarrow (dx)^2 + (dy)^2 = (ds)^2$ επαληθεύει ότι το s είναι το μήκος πάνω στην καμπύλη.
Η καμπυλότητα $\frac{1}{\mathcal{R}} = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \frac{2\pi s}{s_{\rm top}^2}$ αυξάνεται γραμμικά με το μήκος s.
Για $s = 0$ (κατώτερο σημείο) και $s = s_{\rm top}$ (ανώτερο σημείο) είναι $y' = 0$, ενώ στα ενδιάμεσα s είναι $y' > 0$ (το ύψος y αυξάνει με το s).
Αντικαθιστώντας στην γενική έκφραση βρίσκουμε

$$\frac{a}{g} = \sqrt{\left[1 + 4\pi\frac{h-y}{s_{\rm top}}\right]^2 \left(\frac{s}{s_{\rm top}}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right)} = \sqrt{\left[1 + 4\pi\int_{\frac{s}{s_{\rm top}}}^1 \sin\left(\pi\xi^2\right) d\xi\right]^2 \left(\frac{s}{s_{\rm top}}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi s^2}{s_{\rm top}^2}\right)}.$$

Το γράφημα της επιτάχυνσης δίνεται στην εκφώνηση και δείχνει ότι (i) αποκτά ομαλά τη μέγιστη τιμή της και (ii) η μέγιστη αυτή τιμή δεν είναι τόσο υψηλή όσο στην κυκλική τροχιά.
Μια άλλη εφαρμογή της γενικής έκφρασης θα ήταν η κυκλική τροχιά. Θέτοντας $x = R\sin\frac{s}{R}$, $y = R - R\cos\frac{s}{R}$, με $R = \frac{h}{2}$ και $\phi = \frac{s}{R}$ βρίσκουμε τα αποτελέσματα του (α).