$\boxed{1}$: Σώμα έχει ταχύτητα $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.
(α) Εκφράστε την ταχύτητα αυτή σε σφαιρικές συντεταγμένες, δηλ. βρείτε τις $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ και $\hat{\phi}$ συνιστώσες της συναρτήσει των v_x, v_y, v_z, r, θ, ϕ.
(β) Όμοια σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
(γ) Βρείτε τις συνιστώσες της ταχύτητας παράλληλα και κάθετα στο μοναδιαίο $\hat{A} = \dfrac{A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$.

$\boxed{2}$: Σώμα διαγράφει επίπεδη τροχιά με εξίσωση $\varpi = 2c_1 |\sin\phi|$ σε πολικές συντεταγμένες, με $\phi = \frac{1}{2}c_2 t$ (τα c_1 και c_2 είναι σταθερά).
(α) Ποιες οι ταχύτητα και επιτάχυνση του σώματος;
(β) Ποια τα μοναδιαία $\hat{t}$, $\hat{n}$ (στην εφαπτόμενη της τροχιάς και προς το κέντρο καμπυλότητας, αντίστοιχα) και ποια η ακτίνα καμπυλότητας;
(γ) Τι είδους κίνηση εκτελεί το σώμα και τι εκφράζουν οι σταθερές c_1 και c_2; Σχεδιάστε την τροχιά.
(δ) Είναι η τροχιά περιοδική και αν ναι ποια η περίοδός της;
(ε) Περιγράψτε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα τη χρονική στιγμή $t_0 = 2\pi/c_2$; Ποια η στιγμιαία ώθηση της δύναμης αυτής $\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\vec{F}dt = \lim_{\epsilon\to0^+}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} d\left(m\vec{v}\right)$;

$\boxed{3}$: Σώμα μάζας m ακολουθεί τροχιά λογαριθμικής σπείρας $\varpi = \varpi_0 e^{-k\phi}$, όπου ϖ_0 και k θετικές σταθερές. Η κίνηση ξεκινά με αρχικές συνθήκες για $t = 0$, $\phi|_{t=0} = 0$, $\dot{\phi}\Big|_{t=0} = L_0/m\varpi_0^2 > 0$ και γίνεται με τρόπο ώστε η στροφορμή $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = L\hat{z}$ να ελαττώνεται με ρυθμό $\dot{L} = -\lambda$, όπου λ θετική σταθερά.
(α) Βρείτε θέση και ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου.
(β) Οι δυο χρονικές κλίμακες του προβλήματος σχετίζονται με την αλλαγή της θέσης (ταχύτητα) και την αλλαγή της στροφορμής. Αυτοί οι χρόνοι είναι $\tau_v = \left|\frac{\varpi}{\dot{\varpi}}\right|_{t=0} = \frac{m\varpi_0^2}{kL_0}$ και $\tau_L = \left|\frac{L}{\dot{L}}\right|_{t=0} = \frac{L_0}{\lambda}$. Μελετήστε τη χρονική εξέλιξη της κίνησης του σώματος και δείξτε ότι είναι διαφορετική ανάλογα με το αν η τιμή του λόγου τ_L/τ_v είναι > 1, $= 1$, ή < 1. (Διερευνήστε αν το σώμα φτάνει στο κέντρο, αν αλλάζει φορά κίνησης, αν απειρίζεται η κινητική ενέργεια.)

$\boxed{4}$: Έστω σύστημα συντεταγμένων με την αρχή του O σε μια πόλη (θεωρούμενη σημείο), άξονα $x'Ox$ από δύση προς ανατολή και άξονα $y'Oy$ από νότο προς βορρά. Ένας πιλότος θέλει να προσγειωθεί σε αυτήν την πόλη και γι' αυτό κρατά πάντα το αεροσκάφος του με προσανατολισμό προς το O. Η ταχύτητα που δίδουν οι μηχανές ως προς τον αέρα έχει σταθερό μέτρο V και φορά τη φορά του αεροσκάφους. Αν φυσάει αέρας με σταθερή οριζόντια ταχύτητα W από νότο προς βορρά, η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς την πόλη είναι $\vec{v} = -V\hat{r} + W\hat{y}$. Να βρεθεί η τροχιά του αεροσκάφους σε σφαιρικές συντεταγμένες $\{r = r(\phi)\,, \theta = \theta(\phi)\}$ και να εξεταστεί που θα συναντήσει το έδαφος το αεροσκάφος για διάφορες τιμές του λόγου V/W.
Δίνονται τα ολοκληρώματα (με $\mathcal{D}$ σταθερά ολοκλήρωσης):

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \ln\frac{|\tan\theta|}{|\mathcal{D}|}$$

$$\int \frac{d\phi}{\cos\phi\sqrt{1 + C^2\cos^2\phi}} = \ln\frac{\sqrt{1 + C^2\cos^2\phi} + \sin\phi}{|\mathcal{D}|\,|\cos\phi|}$$

$$\int \frac{\sin\phi d\phi}{\cos\phi\left(1 + C^2\cos^2\phi\right)} = \ln\frac{\sqrt{1 + C^2\cos^2\phi}}{|\mathcal{D}|\,|\cos\phi|}$$

$\boxed{5}$: Δύο σώματα Α και Β κινούνται στο επίπεδο. Το σώμα Α έχει γνωστή θέση σε κάθε χρόνο $\vec{r}_A = x_A(t)\hat{x} + y_A(t)\hat{y}$. Το σώμα Β «κυνηγά» το Α, κινούμενο με ταχύτητα σταθερού μέτρου V και φοράς προς την στιγμιαία θέση του σώματος Α. (Το Β θα μπορούσε να είναι μια γάτα που κυνηγά ένα ποντίκι.) Γράφοντας τις συντεταγμένες του Β σαν $\{x_B = x_A + r\cos\phi\,, y_B = y_A + r\sin\phi\}$ δείξτε ότι τα $r(t)$ και $\phi(t)$ αποτελούν λύση του συστήματος $\{\dot{r} = -V - \dot{x}_A\cos\phi - \dot{y}_A\sin\phi\,, r\dot{\phi} = \dot{x}_A\sin\phi - \dot{y}_A\cos\phi\}$.
Εφαρμογή (α): Το Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{W}$, έστω $x_A = 0\,, y_A = -Wt$. Βρείτε την τροχιά που διαγράφει το Β ως προς το Α (δηλ. την $r = r(\phi)$).
Εφαρμογή (β): Το Α κινείται ομαλά κυκλικά σε τροχιά ακτίνας R με γωνιακή ταχύτητα ω, έστω $x_A = R\cos(\omega t)\,, y_A = R\sin(\omega t)$, ενώ το Β ξεκινά από το κέντρο του κύκλου. (Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά που διαγράφει το Β μπορεί να βρεθεί μόνο αριθμητικά.) Δείξτε αναλυτικά ότι για $V < \omega R$, σε μεγάλους χρόνους το σώμα Β κινείται ομαλά κυκλικά γύρω από το κέντρο, με $x_B = \dfrac{V}{\omega}\cos(\omega t - \lambda)\,, y_A = \dfrac{V}{\omega}\sin(\omega t - \lambda)$, όπου $\lambda = \arccos(V/\omega R)$.

ΛΥΣΕΙΣ:

$\boxed{1}$: (α) $\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_\phi\hat{\phi}$, με

$$\left\{\begin{array}{l} v_r = \vec{v}\cdot\hat{r} = v_x\hat{x}\cdot\hat{r} + v_y\hat{y}\cdot\hat{r} + v_z\hat{z}\cdot\hat{r} \\ v_\theta = \vec{v}\cdot\hat{\theta} = v_x\hat{x}\cdot\hat{\theta} + v_y\hat{y}\cdot\hat{\theta} + v_z\hat{z}\cdot\hat{\theta} \\ v_\phi = \vec{v}\cdot\hat{\phi} = v_x\hat{x}\cdot\hat{\phi} + v_y\hat{y}\cdot\hat{\phi} + v_z\hat{z}\cdot\hat{\phi} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} v_r = v_x\cos\phi\,\sin\theta + v_y\sin\phi\,\sin\theta + v_z\cos\theta \\ v_\theta = v_x\cos\phi\,\cos\theta + v_y\sin\phi\,\cos\theta - v_z\sin\theta \\ v_\phi = -v_x\sin\phi + v_y\cos\phi \end{array}\right\}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{r} = \cos\phi\,\sin\theta\,\hat{x} + \sin\phi\,\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos\phi\,\cos\theta\,\hat{x} + \sin\phi\,\cos\theta\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{array}\right\}$$

Αλλιώς: Αντιστρέφοντας τις τελευταίες (ή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις πληρότητας σαν $\hat{x} = (\hat{x}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\hat{x}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta} + (\hat{x}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi}$ και όμοια για τα $\hat{y}$ και $\hat{z}$) βρίσκουμε τα $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ συναρτήσει των $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$, τα οποία αντικαθιστούμε στην $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$.

(β) $\vec{v} = v_\varpi\hat{\varpi} + v_\phi\hat{\phi} + v_z\hat{z}$, με

$$\left\{\begin{array}{l} v_\varpi = \vec{v}\cdot\hat{\varpi} = v_x\hat{x}\cdot\hat{\varpi} + v_y\hat{y}\cdot\hat{\varpi} + v_z\hat{z}\cdot\hat{\varpi} \\ v_\phi = \vec{v}\cdot\hat{\phi} = v_x\hat{x}\cdot\hat{\phi} + v_y\hat{y}\cdot\hat{\phi} + v_z\hat{z}\cdot\hat{\phi} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} v_\varpi = v_x\cos\phi + v_y\sin\phi \\ v_\phi = -v_x\sin\phi + v_y\cos\phi \end{array}\right\}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\varpi} = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{array}\right\}$$

Αλλιώς: Αντιστρέφοντας τις τελευταίες (ή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις πληρότητας σαν $\hat{x} = (\hat{x}\cdot\hat{\varpi})\hat{\varpi} + (\hat{x}\cdot\hat{\phi})\hat{\phi} + (\hat{x}\cdot\hat{z})\hat{z}$ και όμοια για το $\hat{y}$) βρίσκουμε τα $\hat{x}$, $\hat{y}$ συναρτήσει των $\hat{\varpi}$, $\hat{\phi}$, τα οποία αντικαθιστούμε στην $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$.

(γ) $\vec{v} = \underbrace{\left(\vec{v}\cdot\hat{A}\right)\hat{A}}_{\parallel\hat{A}} + \underbrace{\left(\hat{A}\times\vec{v}\right)\times\hat{A}}_{\perp\hat{A}}$, ή απλούστερα $\vec{v}_\parallel = \left(\vec{v}\cdot\hat{A}\right)\hat{A}$ και $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_\parallel$. Άρα $\vec{v}_\parallel = \dfrac{v_xA_x + v_yA_y + v_zA_z}{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right)$ και $\vec{v}_\perp =$

$$\frac{\left(A_y^2 + A_z^2\right)v_x - A_x\left(A_yv_y + A_zv_z\right)}{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\hat{x} + \frac{\left(A_x^2 + A_z^2\right)v_y - A_y\left(A_xv_x + A_zv_z\right)}{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\hat{y} + \frac{\left(A_x^2 + A_y^2\right)v_z - A_z\left(A_xv_x + A_yv_y\right)}{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\hat{z}$$

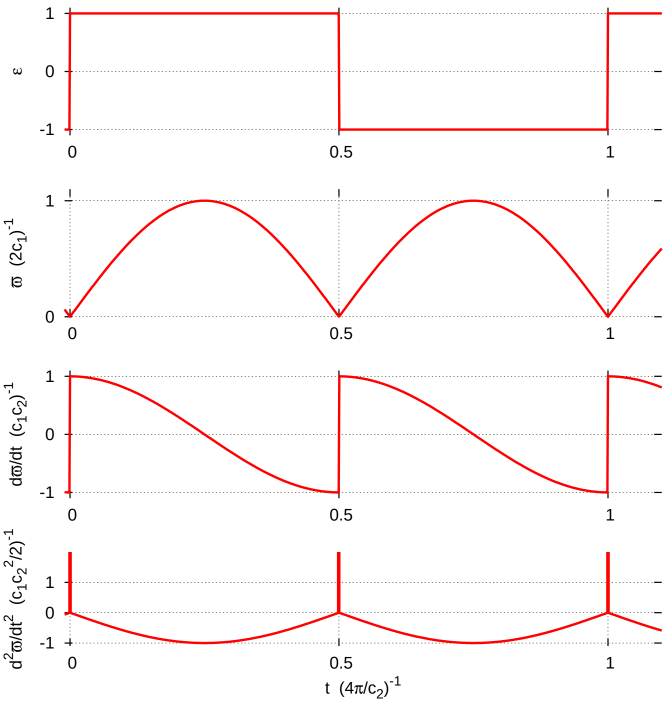
$\boxed{2}$: Είναι $\varpi = 2c_1\varepsilon\sin\phi$ όπου $\varepsilon = \dfrac{\sin\phi}{|\sin\phi|}$ το πρόσημο του $\sin\phi$. Για $\phi \in (2k\pi\,, 2k\pi + \pi)$ με $k \in \mathbb{Z}$ είναι $\varepsilon = 1$, για $\phi \in (2k\pi + \pi\,, 2k\pi + 2\pi)$ είναι $\varepsilon = -1$, ενώ για $\phi = k\pi$ το ε είναι ασυνεχές. Η παράγωγος του ε είναι μηδέν παντού, εκτός από τα σημεία $\phi = k\pi$ όπου δεν ορίζεται.[1] Στα παρακάτω οι ποσότητες υπολογίζονται στα σημεία όπου $\sin\phi \neq 0$. Οι τυχόν ασυνέχειες ή απειρισμοί στα σημεία όπου $\sin\phi = 0$ θα σχολιάζονται σε σχέση με τις τιμές των ποσοτήτων λίγο πριν και λίγο μετά τα σημεία αυτά.

(α) $\varpi = 2c_1\varepsilon\sin\phi = 2c_1\varepsilon\sin\dfrac{c_2t}{2}\,,\quad \phi = \dfrac{1}{2}c_2t.$

$\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi} = c_1c_2\varepsilon\left(\cos\phi\hat{\varpi} + \sin\phi\hat{\phi}\right)$.

$\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi})\hat{\phi} = c_1c_2^2\varepsilon\left(-\sin\phi\hat{\varpi} + \cos\phi\hat{\phi}\right)$.

Στα σημεία όπου $\sin\phi = 0$, δηλ. στους χρόνους $t = 2k\pi/c_2$, η ταχύτητα αλλάζει ακαριαία φορά και άρα η επιτάχυνση απειρίζεται στιγμιαία.



Αυτό φαίνεται και στο παραπάνω γράφημα που δείχνει το ε και τα ϖ, $\dot{\varpi}$, $\ddot{\varpi}$ σε μονάδες $2c_1$, c_1c_2, $c_1c_2^2/2$, αντίστοιχα, σαν συναρτήσεις του χρόνου μετρημένου σε μονάδες $4\pi/c_2$.

(β) $\hat{t} = \dfrac{\vec{v}}{v} = \varepsilon\left(\cos\phi\hat{\varpi} + \sin\phi\hat{\phi}\right)$, διότι οι σταθερές c_1 και c_2 είναι θετικές (η c_1 είναι σίγουρα θετική γιατί $\varpi \geq 0$, ενώ η c_2 μπορεί χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρηθεί θετική – με άλλα λόγια με κατάλληλη επιλογή αξόνων μπορούμε να έχουμε την ϕ να αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο αντί να μειώνεται).

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της ταχύτητας $v = c_1c_2$ είναι σταθερό. Άρα η επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι μηδέν, οπότε η επιτάχυνση είναι μόνο κεντρομόλος $\vec{a} = \underbrace{\dot{v}}_{0}\hat{t} + \dfrac{v^2}{R}\hat{n}$. Επομένως $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}}{a} =$

[1] Θα μπορούσαμε να γράψουμε το ε μέσω της συνάρτηση βήματος και την παράγωγό του μέσω της συνάρτησης δ· το αποφεύγουμε σκεπτόμενοι μόνο τις τιμές των συναρτήσεων λίγο πριν και λίγο μετά από τους μηδενισμούς του $\sin\phi$.

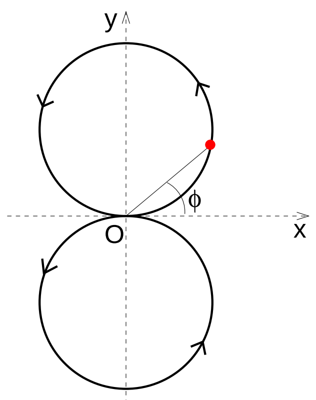
$\varepsilon\left(-\sin\phi\hat{\varpi}+\cos\phi\hat{\phi}\right)$ και $a=\dfrac{v^2}{R}\Leftrightarrow R=\dfrac{v^2}{a}=c_1$.

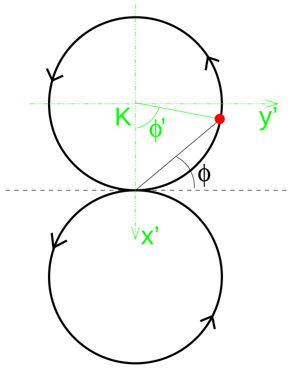
Αλλιώς: $\dfrac{d\hat{t}}{ds}=\dfrac{\hat{n}}{R}$ με $\dfrac{d\hat{t}}{ds}=\dfrac{\frac{d\hat{t}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\dfrac{\frac{d\hat{t}}{d\phi}\dot{\phi}}{v}=\ldots=\dfrac{1}{c_1}\varepsilon\left(-\sin\phi\hat{\varpi}+\cos\phi\hat{\phi}\right)$, οπότε $\left|\dfrac{d\hat{t}}{ds}\right|=\dfrac{1}{R}\Leftrightarrow R=c_1$ και $\hat{n}=R\dfrac{d\hat{t}}{ds}=\varepsilon\left(-\sin\phi\hat{\varpi}+\cos\phi\hat{\phi}\right)$.

(γ) Η κίνηση είναι τμηματικά ομαλή κυκλική (αφού η ακτίνα καμπυλότητας είναι σταθερή και το μέτρο της ταχύτητας σταθερό). Πράγματι, απαλείφοντας το ϕ μεταξύ των $x=\varpi\cos\phi=2c_1\varepsilon\sin\phi\cos\phi=\varepsilon c_1\sin(2\phi)$ και $y=\varpi\sin\phi=2\varepsilon c_1\sin^2\phi=\varepsilon c_1-\varepsilon c_1\cos(2\phi)$ βρίσκουμε $x^2+(y-\varepsilon c_1)^2=c_1^2$ που είναι εξίσωση δυο κύκλων, ενός με κέντρο το $x=0, y=c_1$ και ακτίνα c_1 στην περιοχή $y>0$ (όπου $\sin\phi>0\Leftrightarrow\varepsilon=1$) και ενός δεύτερου με κέντρο το $x=0, y=-c_1$ και ακτίνα c_1 στην περιοχή $y<0$ (όπου $\sin\phi<0\Leftrightarrow\varepsilon=-1$).

Αλλιώς: Το κέντρο καμπυλότητας K του συνεφαπτόμενου κύκλου σε σημείο Σ της τροχιάς μπορεί να βρεθεί από $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{O\Sigma}+\overrightarrow{\Sigma K}\Leftrightarrow x_{\rm K}\hat{x}+y_{\rm K}\hat{y}=\varpi\hat{\varpi}+R\hat{n}$. Μετά από τις αντικαταστάσεις των ϖ, R, $\hat{n}$ και των $\hat{\varpi}=\cos\phi\,\hat{x}+\sin\phi\,\hat{y}$, $\hat{\phi}=-\sin\phi\,\hat{x}+\cos\phi\,\hat{y}$, προκύπτει $x_{\rm K}=0$ και $y_{\rm K}=\varepsilon c_1$.

Η σταθερά $c_1=R$ είναι η ακτίνα της τροχιάς και η $c_2=\omega$ είναι η γωνιακή ταχύτητα, αφού $c_2=v/R$.





Το ότι η γωνιακή ταχύτητα δεν προέκυψε ίση με $\dot{\phi}$, αλλά διπλάσια, οφείλεται στο ότι η ϕ δεν μετράει γωνία με κορυφή το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Στο σύστημα $Kx'y'$ του σχήματος είναι $\phi'=2\phi$ και $\omega=\dot{\phi}'=2\dot{\phi}=c_2$. Αυτό φαίνεται και από τις εκφράσεις $x=\varepsilon c_1\sin(2\phi)$, $y=\varepsilon c_1-\varepsilon c_1\cos(2\phi)$ που βρήκαμε παραπάνω, οι οποίες για $\varepsilon=1$ δίνουν $x'=c_1-y=R\cos\phi'$, $y'=x=R\sin\phi'$ με $\phi'=2\phi=\omega t$.

(δ) Το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στον κύκλο που βρίσκεται στα θετικά y το χρονικό διάστημα $t\in(0\,,2\pi/c_2)\Leftrightarrow\phi\in(0\,,\pi)$, στη συνέχεια μεταβαίνει στον κύκλο που βρίσκεται στα αρνητικά y και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση το χρονικό διάστημα $t\in(2\pi/c_2\,,4\pi/c_2)\Leftrightarrow\phi\in(\pi\,,2\pi)$, μετά πάλι μεταβαίνει στον κύκλο που βρίσκεται στα θετικά y, κ.ο.κ. Αυτό επαναλαμβάνεται σε όλα τα διαστήματα $t\in(0\,,2\pi/c_2)$ και $t\in(2\pi/c_2\,,4\pi/c_2)$, αντίστοιχα. Άρα η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο $T=\dfrac{4\pi}{\omega}$, διπλάσια της περιόδου κάθε μεμονωμένης ομαλής κυκλικής κίνησης.

Αυτό μπορεί να βρεθεί και καθαρά μαθηματικά, από την απαίτηση η T να είναι η μικρότερη θετική λύση της $\vec{r}(t+T)=\vec{r}(t)\Leftrightarrow\begin{cases}x(t+T)=x(t)\\ y(t+T)=y(t)\end{cases}$. Συνέπεια αυτών είναι η $\varpi(t+T)=\varpi(t)$, οπότε οι προηγούμενες δίνουν $\left\{\begin{array}{l}\cos\dfrac{\omega(t+T)}{2}=\cos\dfrac{\omega t}{2}\\ \sin\dfrac{\omega(t+T)}{2}=\sin\dfrac{\omega t}{2}\end{array}\right\}$ με κοινή λύση την $\omega T/2=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, από τις οποίες η μικρότερη θετική λύση είναι $T=\dfrac{4\pi}{\omega}$.

(ε) Τον χρόνο $t_0=2\pi/c_2$ το σώμα μεταβαίνει από τον κύκλο $y>0$ στον κύκλο $y<0$ και η ταχύτητά του αλλάζει στιγμιαία από $\vec{v}|_{t=t_0^-}=\vec{v}|_{\phi=\pi^-}=-c_1c_2\hat{\varpi}=\omega R\hat{x}$ σε $\vec{v}|_{t=t_0^+}=\vec{v}|_{\phi=\pi^+}=c_1c_2\hat{\varpi}=-\omega R\hat{x}$. Η ακαριαία αυτή αλλαγή σημαίνει ότι η επιτάχυνση απειρίζεται, όπως και η δύναμη, διότι $\vec{F}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$ με πεπερασμένο $\Delta(m\vec{v})=m\vec{v}|_{t=t_0^+}-m\vec{v}|_{t=t_0^-}=-2m\omega R\hat{x}$ και (θεωρητικά) μηδενικό Δt. Η ώθηση όμως είναι πεπερασμένη, με $\vec{\Omega}=\vec{F}\Delta t=\Delta(m\vec{v})=-2m\omega R\hat{x}$.

$\boxed{3}$: $\vec{L}=m\underbrace{\varpi\hat{\varpi}}_{\vec{r}}\times\underbrace{(\dot{\varpi}\hat{\varpi}+\varpi\dot{\phi}\hat{\phi})}_{\vec{v}}=m\varpi^2\dot{\phi}\hat{z}=m\varpi_0^2e^{-2k\phi}\dot{\phi}\hat{z}\Leftrightarrow L=m\varpi_0^2e^{-2k\phi}\dot{\phi}$. Αρχικά, χρησιμοποιώντας τις δεδομένες αρχικές συνθήκες, προκύπτει $L=L_0$. Άρα $\dot{L}=-\lambda\Leftrightarrow\displaystyle\int_{L_0}^{L}dL=-\lambda\int_0^t dt\Leftrightarrow L=L_0-\lambda t$ και $m\varpi_0^2e^{-2k\phi}\dot{\phi}=L_0-\lambda t\Leftrightarrow m\varpi_0^2\displaystyle\int_0^{\phi}e^{-2k\phi}d\phi=\int_0^t(L_0-\lambda t)\,dt\Leftrightarrow m\varpi_0^2\left[\dfrac{e^{-2k\phi}}{-2k}\right]_0^{\phi}=\left[\dfrac{(L_0-\lambda t)^2}{-2\lambda}\right]_0^t\Leftrightarrow$

$\phi=\ln\left[1-\dfrac{\tau_L}{\tau_v}+\dfrac{\tau_L}{\tau_v}\left(1-\dfrac{t}{\tau_L}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2k}}$.

Από τη σχέση μεταξύ ϖ και ϕ βρίσκουμε αντικαθιστώντας $\varpi=\varpi_0\sqrt{1-\dfrac{\tau_L}{\tau_v}+\dfrac{\tau_L}{\tau_v}\left(1-\dfrac{t}{\tau_L}\right)^2}$.

Οι παραπάνω σχέσεις $\phi=\phi(t)$ και $\varpi=\varpi(t)$ καθορίζουν πλήρως τη θέση μέσω της $\vec{r}=\varpi\hat{\varpi}=\varpi\cos\phi\,\hat{x}+\varpi\sin\phi\,\hat{y}$.

Η ταχύτητα, αντικαθιστώντας στην $\vec{v}=\dot{\varpi}\hat{\varpi}+\varpi\dot{\phi}\hat{\phi}$, προκύπτει $\vec{v} = \dfrac{\varpi_0}{\tau_v} \dfrac{\left(1 - \frac{t}{\tau_L}\right)\left(-\hat{\varpi} + \frac{1}{k}\hat{\phi}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\tau_L}{\tau_v} + \frac{\tau_L}{\tau_v}\left(1 - \frac{t}{\tau_L}\right)^2}}$.

(β) Πρέπει να διερευνηθεί αν και πότε μηδενίζεται η ακτίνα ϖ σε σχέση με το χρόνο τ_L στον οποίο αλλάζει η φορά κίνησης (όπως φαίνεται από την έκφραση της ταχύτητας).

Από την έκφραση $\varpi = \varpi_0 \sqrt{1 - \frac{\tau_L}{\tau_v} + \frac{\tau_L}{\tau_v}\left(1 - \frac{t}{\tau_L}\right)^2}$ βλέπουμε ότι:

- αν $1 - \frac{\tau_L}{\tau_v} > 0 \Leftrightarrow \tau_L < \tau_v$ η υπόριζη ποσότητα είναι πάντα θετική και παίρνει την ελάχιστη τιμή για $t = \tau_L$. Σε αυτήν την περίπτωση το σώμα κινείται προς τα μέσα (με $\vec{v} \cdot \hat{\varpi} = \dot{\varpi} < 0$ και $\dot{\phi} > 0$) στο χρονικό διάστημα $t \in [0, \tau_L)$, φτάνει σε μια ελάχιστη ακτίνα $\varpi_{\min} = \varpi_0 \sqrt{1 - \frac{\tau_L}{\tau_v}}$ και μια μέγιστη γωνία $\phi_{\max} = \frac{1}{k} \ln \frac{\varpi_0}{\varpi_{\min}}$ και μετά αρχίζει να κινείται προς τα έξω (με $\vec{v} \cdot \hat{\varpi} = \dot{\varpi} > 0$ και $\dot{\phi} < 0$).
- αν $1 - \frac{\tau_L}{\tau_v} < 0 \Leftrightarrow \tau_L > \tau_v$ η υπόριζη ποσότητα θα μηδενιστεί πριν το χρόνο $t = \tau_L$. Συγκεκριμένα, θα μηδενιστεί το χρόνο $t = \tau_L - \sqrt{\tau_L^2 - \tau_L \tau_v}$. Σε αυτό το χρόνο το σώμα φτάνει στο κέντρο ($\varpi = 0$) έχοντας κάνει άπειρες περιστροφές ($\phi \to \infty$) και έχοντας κερδίσει άπειρη ενέργεια (αφού $v \to \infty$) από αυτόν που υποχρεώνει τη στροφορμή να ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό.
- αν $\tau_L = \tau_v$ τότε $\phi = \ln\left|1 - \frac{t}{\tau_L}\right|^{-\frac{1}{k}}$, $\varpi = \varpi_0 \left|1 - \frac{t}{\tau_L}\right|$, $\vec{v} = \dfrac{\varpi_0}{\tau_v} \dfrac{1 - \frac{t}{\tau_L}}{\left|1 - \frac{t}{\tau_L}\right|}\left(-\hat{\varpi} + \frac{1}{k}\hat{\phi}\right)$. Το σώμα κινείται προς τα μέσα με ταχύτητα σταθερού μέτρου, φτάνει στο κέντρο στο χρόνο τ_L (έχοντας κάνει άπειρες περιστροφές) και στη συνέχεια κινείται προς τα έξω με ταχύτητα σταθερού μέτρου.

Να σημειωθεί ότι η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι $\vec{F} = m\vec{a} = \ldots = -\left(\frac{mv^2}{\varpi} - \frac{k\lambda}{\varpi}\right)\hat{\varpi} - \frac{\lambda}{\varpi}\hat{\phi}$ και όχι μόνο απειρίζεται στο $\varpi = 0$, αλλά η $\hat{\phi}$ συνιστώσα της είναι προβληματική αφού η φορά της δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη για $\varpi = 0$. Με άλλα λόγια, η υπόθεση ότι η στροφορμή ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό δεν είναι ρεαλιστική όταν το σώμα πλησιάσει αρκετά κοντά στον άξονα περιστροφής.

$\boxed{4}$: Σε σφαιρικές $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\phi}\hat{\phi}$. Οι $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ συνιστώσες της $\vec{v} = W\hat{y} - V\hat{r}$ είναι

$$\begin{cases} \dot{r} = W\hat{y}\cdot\hat{r} - V \Leftrightarrow \dot{r} = W\sin\phi\,\sin\theta - V & ① \\ r\dot{\theta} = W\hat{y}\cdot\hat{\theta} \Leftrightarrow r\dot{\theta} = W\sin\phi\,\cos\theta & ② \\ r\sin\theta\,\dot{\phi} = W\hat{y}\cdot\hat{\phi} \Leftrightarrow r\sin\theta\,\dot{\phi} = W\cos\phi & ③ \end{cases}$$

$\frac{②}{③} \leadsto \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\sin\phi\,\cos\theta}{\cos\phi} \Leftrightarrow \int \frac{d\theta}{\sin\theta\,\cos\theta} = \int \frac{\sin\phi\,d\phi}{\cos\phi} \Leftrightarrow \ln\frac{|\tan\theta|}{|\mathcal{D}_1|} = -\ln|\cos\phi| \Leftrightarrow$ $\tan\theta\,\cos\phi = \mathcal{D}_1 =$ σταθερά. Αν (r_0, θ_0, ϕ_0) είναι η αρχική θέση του αεροπλάνου, στο διάστημα $\theta \in (0, \pi/2)$ που μας ενδιαφέρει η λύση γράφεται

$$\theta = \arctan\frac{\mathcal{D}_1}{\cos\phi} \quad ④$$

όπου $\mathcal{D}_1 = \tan\theta_0\,\cos\phi_0$.

$\frac{①}{③} \leadsto \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sin\phi\,\sin\theta}{\cos\phi} - \frac{V}{W\cos\phi}$. Αυτή είναι μια διαφορική που θα δώσει την $r = r(\phi)$, αρκεί να αντικαταστήσουμε το $\sin\theta$ από τη λύση $\theta = \theta(\phi)$ που έχουμε βρει. Στο διάστημα $\theta \in (0, \pi/2)$ είναι $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{D}_1^{-2}\cos^2\phi}}$

οπότε $\int \frac{dr}{r} = \int \frac{\sin\phi\,d\phi}{\cos\phi\left(1 + \mathcal{D}_1^{-2}\cos^2\phi\right)} - \frac{V}{W}\int \frac{d\phi}{\cos\phi\sqrt{1 + \mathcal{D}_1^{-2}\cos^2\phi}} \Leftrightarrow \ln\frac{r}{\mathcal{D}_2} = \ln\frac{\sqrt{1 + \mathcal{D}_1^{-2}\cos^2\phi}}{|\cos\phi|} - \frac{V}{W}\ln\frac{\sqrt{1 + \mathcal{D}_1^{-2}\cos^2\phi} + \sin\phi}{|\cos\phi|} \Leftrightarrow$

$$r = \mathcal{D}_2 \frac{|\cos\phi|^{\frac{V}{W}-1}\sqrt{1 + \mathcal{D}_1^{-2}\cos^2\phi}}{\left(\sqrt{1 + \mathcal{D}_1^{-2}\cos^2\phi} + \sin\phi\right)^{\frac{V}{W}}} \quad ⑤$$

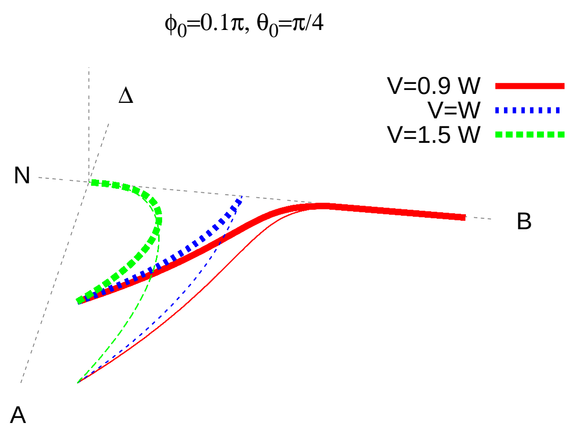
όπου η νέα σταθερά ολοκλήρωσης

$\mathcal{D}_2 = r_0|\cos\phi_0|^{1-\frac{V}{W}}\,\sin\theta_0\left(\sin\phi_0 + \frac{1}{\sin\theta_0}\right)^{\frac{V}{W}}$.

Από τη σχέση ④ βλέπουμε ότι όταν το αεροπλάνο πλησιάζει το έδαφος, δηλ. $\theta \to \pi/2$, είναι και $\cos\phi \to 0 \Leftrightarrow \phi \to \pi/2$. (Η τιμή $\phi = 3\pi/2$ απορρίπτεται διότι η ③ δίνει ότι η $\sin\phi$ αυξάνει με το χρόνο.) Άρα η συνάντηση με το έδαφος θα γίνει στο σημείο $\vec{r} = r\hat{y}$ με το r να δίνεται από τη σχέση ⑤

$$r \to \frac{\mathcal{D}_2}{2^{\frac{V}{W}}} \lim_{\cos\phi\to 0} |\cos\phi|^{\frac{V}{W}-1} = \begin{cases} 0\,, & \text{αν } V > W \\ +\infty\,, & \text{αν } V < W \\ \mathcal{D}_2/2\,, & \text{αν } V = W \end{cases}$$

Επομένως, αν $V > W$ το αεροπλάνο θα φτάσει στην πόλη, αν $V = W$ θα συναντήσει το έδαφος σε απόσταση $\mathcal{D}_2/2$ βόρεια της πόλης, ενώ αν $V < W$ θα συναντήσει το έδαφος σε άπειρη θεωρητικά απόσταση βόρεια της πόλης. Στο επόμενο σχήμα φαίνονται τρεις τροχιές καθώς και οι προβολές τους στο έδαφος, μια για κάθε κατηγορία, $V < W$, $V = W$, $V > W$ και συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες.



$\boxed{5}$: Η ταχύτητα του B έχει μέτρο V και φορά πάνω στη διανυσματική μονάδα από το B στο A, δηλ. $\dot{\vec{r}}_B = V\dfrac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|}$. Αντικαθιστώντας τα $\vec{r}_A = x_A\hat{x} + y_A\hat{y}$ και $\vec{r}_B = (x_A + r\cos\phi)\,\hat{x} + (y_A + r\sin\phi)\,\hat{y}$ καταλήγουμε στις

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_A + \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi = -V\cos\phi \\ \dot{y}_A + \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi = -V\sin\phi \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{r} = -V - \dot{x}_A\cos\phi - \dot{y}_A\sin\phi \\ r\dot{\phi} = \dot{x}_A\sin\phi - \dot{y}_A\cos\phi \end{array}\right\}$$

Αλλιώς: Θέτοντας $\vec{r}_B = \vec{r}_A + r\cos\phi\hat{x} + r\sin\phi\hat{y}$, πρακτικά περιγράφουμε την θέση του B ως προς το A χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες. Μπορούμε να ορίσουμε τα μοναδιαία $\hat{r} = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}$, $\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ κατά τα γνωστά και να γράφουμε τη σχετική θέση του B ως προς το A σαν $\vec{r}_B - \vec{r}_A = r\hat{r}$ και τη σχετική ταχύτητα του B ως προς το A σαν $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι ταχύτητες των B και A στη βάση $(\hat{r}\,,\hat{\phi})$ είναι $\vec{v}_B = -V\hat{r}$, $\vec{v}_A = \left(\dot{\vec{r}}_A\cdot\hat{r}\right)\hat{r} + \left(\dot{\vec{r}}_A\cdot\hat{\phi}\right)\hat{\phi} = (\dot{x}_A\cos\phi + \dot{y}_A\sin\phi)\,\hat{r} + (-\dot{x}_A\sin\phi + \dot{y}_A\cos\phi)\,\hat{\phi}$. Επομένως η $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$ δίνει $-V\hat{r} - (\dot{x}_A\cos\phi + \dot{y}_A\sin\phi)\,\hat{r} - (-\dot{x}_A\sin\phi + \dot{y}_A\cos\phi)\,\hat{\phi} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$ από τις οποίες προκύπτουν οι ζητούμενες $\{\dot{r} = -V - \dot{x}_A\cos\phi - \dot{y}_A\sin\phi\,, r\dot{\phi} = \dot{x}_A\sin\phi - \dot{y}_A\cos\phi\}$.

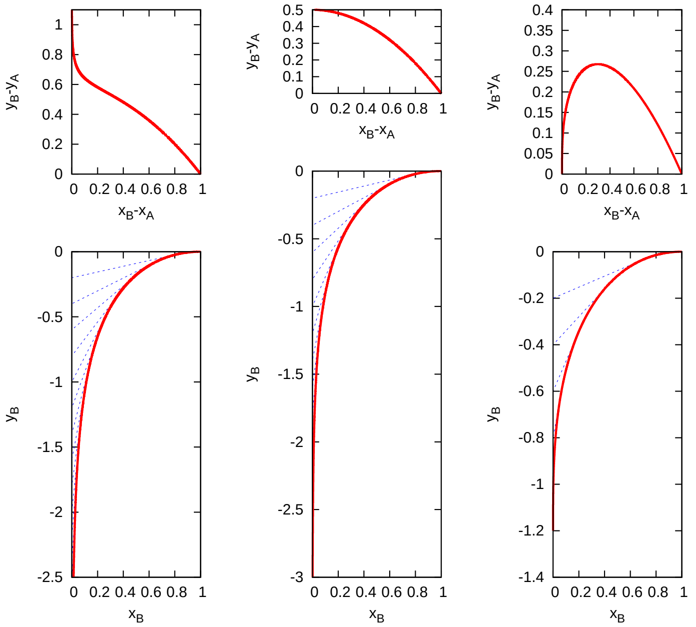
(α) Για $x_A = 0$ και $y_A = -Wt$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} \dot{r} = -V + W\sin\phi \\ r\dot{\phi} = W\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dr}{rd\phi} = \frac{-V + W\sin\phi}{W\cos\phi}.$$

Το πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου προβλήματος $\boxed{4}$, για επίπεδη κίνηση με $\theta = \pi/2$. Όμοια βρίσκουμε $r = \mathcal{D}|\cos\phi|^{\frac{V}{W}-1}(1+\sin\phi)^{-\frac{V}{W}}$

Ισοδύναμα στη λύση του προβλήματος $\boxed{4}$ θέτουμε $\theta_0 = \pi/2$, οπότε $\mathcal{D}_1^{-2} = 0$, $\mathcal{D}_2 = r_0|\cos\phi_0|^{1-\frac{V}{W}}\,(1+\sin\phi_0)^{\frac{V}{W}}$ και $r = r_0\left|\dfrac{\cos\phi}{\cos\phi_0}\right|^{\frac{V}{W}-1}\left(\dfrac{1+\sin\phi_0}{1+\sin\phi}\right)^{\frac{V}{W}}$.

Παρακάτω βλέπουμε αριθμητικές λύσεις για $V = 0.9W$ (πρώτη στήλη), $V = W$ (δεύτερη στήλη) και $V = 1.5W$ (τρίτη στήλη) και αρχικές συνθήκες $\phi = 0$, $r = r_0 = 1$. Τα πάνω γραφήματα δείχνουν την τροχιά του B όπως την βλέπει το A. Τα κάτω γραφήματα δείχνουν τις τροχιές και των δύο σωμάτων καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σώματα σε κάποιες χρονικές στιγμές.



- Αν $V < W$ η απόσταση μεταξύ των σωμάτων ποτέ δεν μηδενίζεται. Αντιθέτως απειρίζεται καθώς το B ακολουθώντας το A ασυμπτωτικά κινείται με φορά $-\hat{y}$ ($\phi \to +\pi/2$). Πράγματι, είναι[2] $x_B = r\cos\phi = \mathcal{D}\left(\dfrac{\cos\phi}{1+\sin\phi}\right)^{\frac{V}{W}}$ και $y_B = -Wt + r\sin\phi = -Wt + \mathcal{D}\dfrac{\sin\phi}{(\cos\phi)^{1-\frac{V}{W}}\,(1+\sin\phi)^{\frac{V}{W}}}$, με $x_B \approx 0$ και $y_B \approx -Wt + \dfrac{\mathcal{D}}{2^{\frac{V}{W}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)^{1-\frac{V}{W}}}$ για $\phi \approx \pi/2$. Πρέπει να είναι $y_B \approx -Vt$ αφού το σώμα B καταλήγει να κυνηγά το A πάνω στον y άξονα. Η σχετική τους απόσταση αυξάνει σαν $r \approx (W-V)t$. Άρα η γωνία ϕ πλησιάζει το $\pi/2$ σαν $\phi \approx \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\mathcal{D}}{2^{\frac{V}{W}}Vt}\right)^{\frac{W}{W-V}}$.
- Αν $V = W$ είναι $r = \dfrac{\mathcal{D}}{1+\sin\phi}$, δηλ. η τροχιά του B ως προς το A είναι τμήμα παραβολής. Η απόσταση r δεν μηδενίζεται ποτέ, οπότε τα σώματα δεν συναντώνται. Το B καταλήγει σε $t \to \infty$ να κινείται σε σταθερή απόσταση $r \to \mathcal{D}/2$ από το A (με $\phi \to \pi/2$).

Στην περίπτωση αυτή μπορούν να βρεθούν ανα-

[2] Το πρόσημο του $\cos\phi$ δεν αλλάζει όσο $r < \infty$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί θετικό.

λυτικά και οι σχέσεις των r, ϕ με το χρόνο. Από $r\dot{\phi} = W\cos\phi \Leftrightarrow \frac{2W}{\mathcal{D}}\int dt = \int \frac{2d\phi}{\cos\phi\,(1+\sin\phi)} \Leftrightarrow \frac{2W}{\mathcal{D}}(t-t_0) = \frac{\sin\phi}{1+\sin\phi} + \ln\sqrt{\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}} = 1 - \frac{r}{\mathcal{D}} - \ln\sqrt{2\frac{r}{\mathcal{D}} - 1}$.

- Αν $V > W$ η απόσταση r μηδενίζεται για $\phi = \pi/2$, δηλ. το B θα φτάσει το A.

(β) Εδώ με $x_A = R\cos\omega t\,, y_A = R\sin\omega t$ προκύπτει

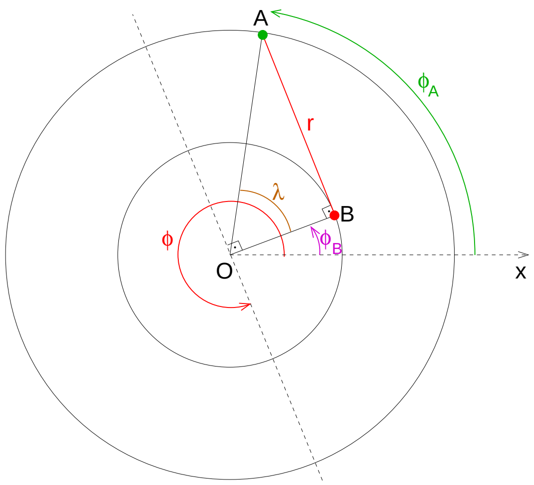
$$\left\{\begin{array}{l} \dot{r} = -V + \omega R\sin\omega t\,\cos\phi - \omega R\cos\omega t\,\sin\phi \\ r\dot{\phi} = -\omega R\sin\omega t\,\sin\phi - \omega R\cos\omega t\,\cos\phi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \dot{r} = -V - \omega R\sin(\phi - \omega t) & ① \\ r\dot{\phi} = -\omega R\cos(\phi - \omega t) & ② \end{array}\right\}$$

Ασυμπτωτικά $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow \sin(\phi - \omega t) = -\frac{V}{\omega R} < 0$ και $r\dot{\phi} > 0 \Leftrightarrow \cos(\phi - \omega t) < 0$. Επομένως η $\phi - \omega t$ είναι μια σταθερή γωνία στο διάστημα $(\pi\,, 3\pi/2)$ της οποίας το ημίτονο είναι $-V/\omega R$. Θέτοντας $\phi - \omega t = \frac{3\pi}{2} - \lambda$ με $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, η ① δίνει $\lambda = \arccos\frac{V}{\omega R}$ και η ② δίνει την τιμή της σταθερής απόστασης μεταξύ των σωμάτων $r\omega = \omega R\sin\lambda \Leftrightarrow r = R\sin\lambda = R\sqrt{1 - \left(\frac{V}{\omega R}\right)^2}$.

Γνωρίζοντας τα $r = R\sin\lambda$ και $\phi = \omega t + \frac{3\pi}{2} - \lambda$, όπου $\lambda = \arccos\frac{V}{\omega R}$, μπορούμε να βρούμε τα x_B, y_B:

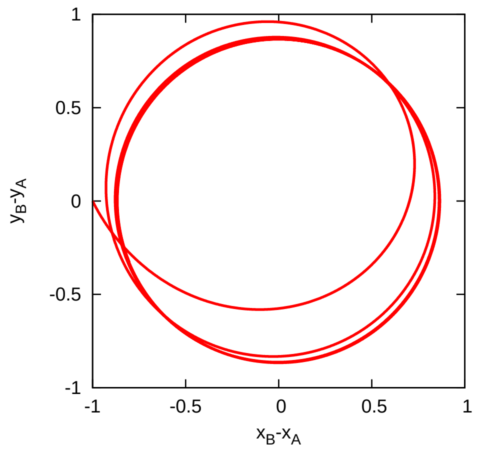
$$\left\{\begin{array}{l} x_B = R\cos(\omega t) + R\sin\lambda\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2} - \lambda\right) \\ y_B = R\cos(\omega t) + R\sin\lambda\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2} - \lambda\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

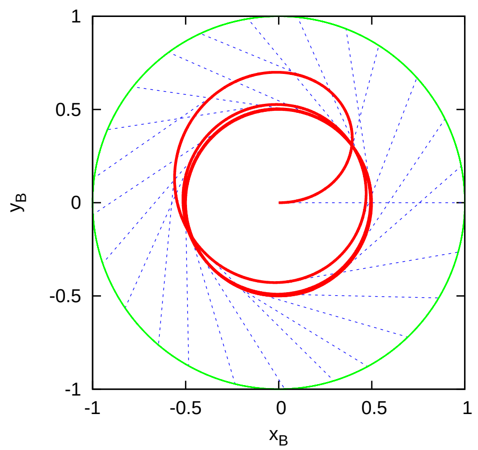
$$\left\{\begin{array}{l} x_B = \frac{V}{\omega}\cos(\omega t - \lambda) \\ y_B = \frac{V}{\omega}\sin(\omega t - \lambda) \end{array}\right\}$$ δηλ. το B εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας V/ω σε κύκλο ομόκεντρο της τροχιάς του A, με κοινή γωνιακή ταχύτητα και διαφορά φάσης λ.



Τα ίδια προκύπτουν και γεωμετρικά: Η ταχύτητα του B έχει τη φορά του BA, εφαπτόμενη στον εσωτερικό κύκλο ακτίνας R_B. Σε μεγάλους χρόνους οπότε η απόσταση r είναι σταθερή, το τρίγωνο OBA περιστρέφεται σα στερεό γύρω από το O, με γωνιακή ταχύτητα ω. Η ακτίνα $R_B = V/\omega$ αφού η ταχύτητα του B έχει μέτρο V. Τα διανύσματα θέσης των A και B σχηματίζουν σταθερή γωνία $\phi_A - \phi_B = \lambda$, οπότε $\phi_B = \phi_A - \lambda$ με $\phi_A = \omega t$. Το ορθογώνιο τρίγωνο OBA δίνει την γωνία λ από $\cos\lambda = R_B/R = V/\omega R$ και την απόσταση $r = R\sin\lambda$. Τέλος η γωνία ϕ βρίσκεται σαν $\phi = \frac{3\pi}{2} + \phi_B$ με $\phi_B = \phi_A - \lambda = \omega t - \lambda$.

Τα παρακάτω γραφήματα δείχνουν την αριθμητική λύση του προβλήματος για $V = \frac{1}{2}\omega R$. Το πρώτο γράφημα δείχνει την τροχιά του B όπως την βλέπει ο A, και το δεύτερο δείχνει τις τροχιές και των δύο σωμάτων καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα σώματα σε κάποιες χρονικές στιγμές.





Να σημειωθεί ότι η προηγούμενη ανάλυση ισχύει ανεξάρτητα από την αρχική θέση του B (αρκεί μόνο $V \leq \omega R$). Ακολουθεί ένα παράδειγμα.