$\boxed{1}$:

Οριζόντιος δίσκος ακτίνας ℓ περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Στο κέντρο του βρίσκεται παρατηρητής **O** που περιστρέφεται μαζί με το δίσκο. Ένας άλλος ακίνητος παρατηρητής **A** βρίσκεται λίγο έξω από ένα σημείο της περιφέρειας του δίσκου (ο **A** δεν περιστρέφεται). Ο **A**, στον χρόνο $t = 0$, πετά οριζόντια πάνω στο δίσκο σώμα μάζας m, με ταχύτητα v_0 προς τον **O**.

(α) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του δίσκου είναι f γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του m ως προς το σύστημα αναφοράς Oxy με κέντρο τον **O** το οποίο περιστρέφεται μαζί με το δίσκο. Σχολιάστε πως επιδρούν στην κίνηση οι διάφορες δυνάμεις (πραγματικές και υποθετικές).

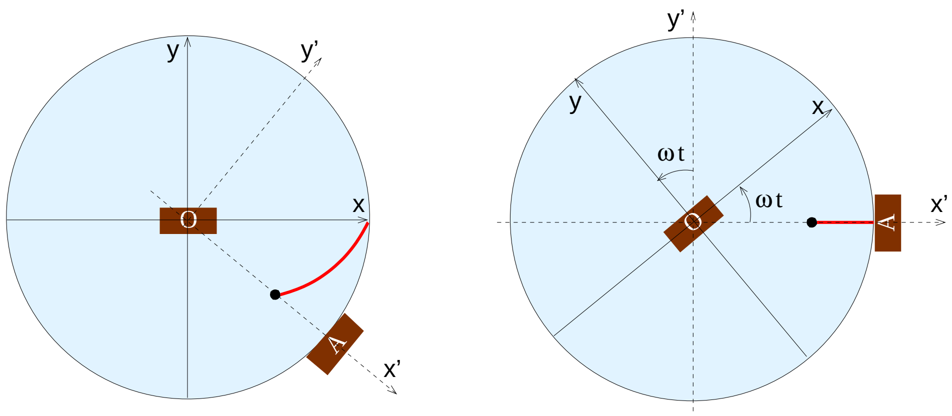
(β) Λύστε τις εξισώσεις για $f = 0$. Σχεδιάστε την τροχιά για (β$_1$) $\omega\ell/v_0 < \pi/2$ και (β$_2$) $\pi/2 < \omega\ell/v_0 < \pi$.

Δίνεται η λύση του συστήματος $\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = (C_1 + C_2 t)\cos(\omega t) + (C_3 + C_4 t)\sin(\omega t) \\ y = -(C_1 + C_2 t)\sin(\omega t) + (C_3 + C_4 t)\cos(\omega t) \end{array} \right.$

(Ένας τρόπος να βρεθεί αυτή η λύση είναι να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να γράψουμε το σύστημα σαν $\ddot{z} + 2i\omega\dot{z} - \omega^2 z = 0$, όπου $z = x + iy$.)

(γ) Έστω ένα άλλο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς το οποίο επίσης περιστρέφεται μαζί με το δίσκο, αλλά έχει αρχή το σημείο της περιφέρειας από το οποίο ο **A** πετάει το σώμα. Ποιές είναι τώρα οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα; Επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμά τους (η επιτάχυνση $\vec{a}_\sigma$) είναι ίδιο με αυτό του βρήκατε στο προηγούμενο σύστημα αναφοράς με αρχή το **O**.

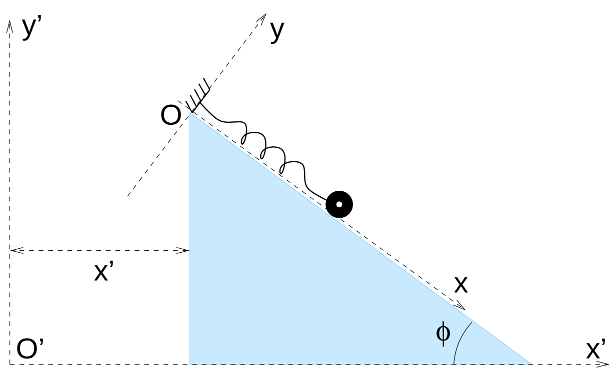
(δ) Τι είδους κίνηση κάνει το σώμα σύμφωνα με τον παρατηρητή **A**; Γράψτε την θέση του σώματος σαν συνάρτηση με το χρόνο, ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς $Ox'y'$ με κέντρο τον **O**. Δείξτε ότι η λύση είναι ισοδύναμη με αυτή που βρήκατε στο ερώτημα (β).
Για τα μοναδιαία του δίπλα σχήματος (το αριστερά δείχνει πως βλέπει την κίνηση ο **O** και το δεξιά αφορά τον **A**) δίνονται οι σχέσεις:



$$\hat{x}' = (\hat{x}' \cdot \hat{x})\,\hat{x} + (\hat{x}' \cdot \hat{y})\,\hat{y} = \cos(\omega t)\,\hat{x} - \sin(\omega t)\,\hat{y}\,, \quad \hat{y}' = (\hat{y}' \cdot \hat{x})\,\hat{x} + (\hat{y}' \cdot \hat{y})\,\hat{y} = \sin(\omega t)\,\hat{x} + \cos(\omega t)\,\hat{y}\,.$$

$\boxed{2}$:

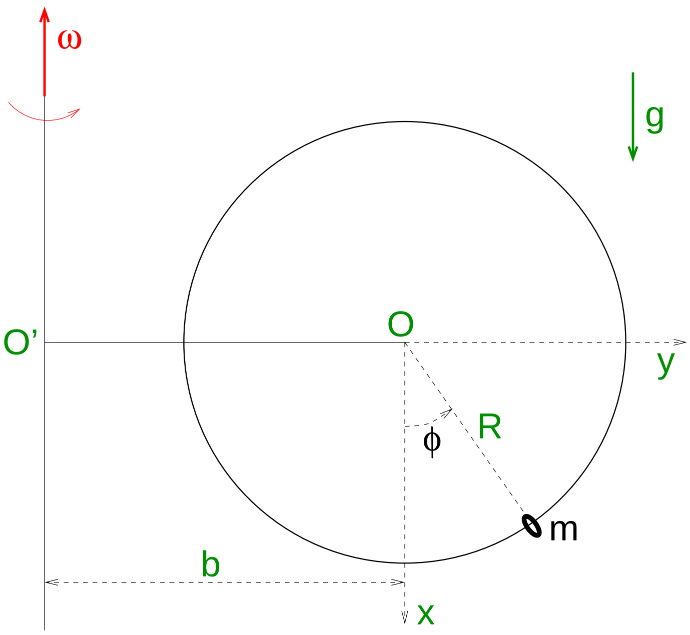
Σώμα μάζας m ισορροπεί πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο κλίσης ϕ, συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς $m\omega_0^2$ και φυσικού μήκους ℓ_0. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$. Τον χρόνο $t = 0$ αρχίζουμε να κινούμε το κεκλιμένο επίπεδο έτσι ώστε η οριζόντια απόστασή του από σταθερό σημείο O' να μεταβάλλεται σαν $x' = \frac{f_0}{\omega^2}\cos(\omega t)$. Η κίνηση αυτή προκαλεί την κύλιση του σώματος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Εκτός της δύναμης ελατηρίου, του βάρους και της κάθετης αντίδρασης, στο σώμα ασκείται και αντίσταση κύλισης $-2m\gamma\vec{v}_\sigma$, όπου $\vec{v}_\sigma$ η ταχύτητά του ως προς το επίπεδο και γ θετική σταθερά.



Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σώματος στο μη αδρανειακό σύστημα Oxy. Ποιά η θέση του $x(t)$ σε «μεγάλους χρόνους»; Τι εννοούμε «μεγάλους χρόνους» (με τι συγκρίνουμε το χρόνο για να τον χαρακτηρίσουμε «μεγάλο»); Διερευνήστε αν και πότε το σώμα χάνει την επαφή του με το επίπεδο.

συνεχίζεται
↪

$\boxed{3}$:
Κατακόρυφη στεφάνη ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα που απέχει απόσταση b από το κέντρο της. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$. Ένα δαχτυλίδι μάζας m είναι περασμένο στη στεφάνη και κινείται πάνω της χωρίς τριβές.
(α) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού, δηλαδή την διαφορική εξίσωση που δίνει την γωνία ϕ μεταξύ $\vec{g}$ και του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ του δαχτυλιδιού από το κέντρο της στεφάνης, σαν συνάρτηση του χρόνου.
(β) Ποιά η ενέργεια E_α του δαχτυλιδιού όπως την μετρά αδρανειακός παρατηρητής; Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της dE_α/dt. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης δείξτε ότι η E_α δεν διατηρείται και ότι ο ρυθμός μεταβολής της ισούται με την ισχύ της δύναμης $\vec{N}$ που ασκεί η στεφάνη στο δαχτυλίδι, δηλαδή $dE_\alpha/dt = \vec{N} \cdot \vec{v}_\alpha$.



$\boxed{4}$:
Σώμα κινείται πάνω στην επιφάνεια της περιστρεφόμενης γης (με γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\vec{\omega}$), σε τόπο γεωγραφικού πλάτους λ. Θεωρούμε αμελητέες την τριβή και την αντίσταση του αέρα.
(α) Έστω η κίνηση γίνεται σε ένα οριζόντιο τραπέζι, θεωρούμε τη βαρύτητα ομογενή και αμελούμε τους όρους που είναι ανάλογοι του ω^2 στην εξίσωση κίνησης, οπότε το βάρος $m\vec{g}_0$ και οι υποθετικές δυνάμεις $-m\vec{a}_0$, $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$, $-2m\vec{\omega}_\parallel \times \vec{v}_\sigma$ (η συνιστώσα της Coriolis κάθετα στο επίπεδο, με $\vec{\omega}_\parallel$ την συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας πάνω στο επίπεδο) έχουν συνισταμένη $m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_\parallel \times \vec{v}_\sigma$ κάθετη στο τραπέζι και εξουδετερώνονται πλήρως από την κάθετη αντίδραση. Η κίνηση του σώματος πάνω στο οριζόντιο τραπέζι περιγράφεται τότε από την $\vec{a}_\sigma = -2\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}_\sigma$ (όπου $\vec{\omega}_\perp$ η συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας κάθετα στο επίπεδο). Δείξτε ότι η κίνηση είναι ομαλή κυκλική με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega} = -2\omega \sin\lambda \hat{z}$, όπου $\hat{z}$ η κατεύθυνση προς το ζενίθ του τόπου.
Πράξαμε σωστά που θεωρήσαμε τη βαρύτητα ομογενή και αμελήσαμε τους όρους με ω^2; (Είναι συμβατή η λύση που βρέθηκε με αυτή την υπόθεση;)
(β) Λύστε το πρόβλημα θεωρώντας ότι η κίνηση γίνεται στην σφαιρική επιφάνεια της γης (δεν είναι περιορισμένη σε ένα μικρό τόπο οπότε δεν μπορούμε να πούμε ότι γίνεται σε ένα «οριζόντιο τραπέζι») χωρίς να θεωρήσετε τη βαρύτητα ομογενή και ούτε να αμελήσετε τους όρους με ω^2.