

1:

Έστω δύναμη  $\vec{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{x} + \lambda xyz^3\hat{y} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{z}$ , όπου  $\lambda$  σταθερά (όλα τα μεγέθη στο σύστημα μονάδων mks).

(α) Ποιό το έργο της  $\vec{F}$  για μια κλειστή διαδρομή σχήματος τετραγώνου με κορυφές τα  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 0, 1)$ ,  $\Gamma(1, 1, 1)$ ,  $\Delta(0, 1, 1)$  και φορά κίνησης  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ ;

(β) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, βρείτε για ποια τιμή της σταθεράς  $\lambda$  ίσως η  $\vec{F}$  να είναι συντηρητική.

Για αυτή τη τιμή του  $\lambda$  είναι πράγματι συντηρητική;

Αν ναι, ποιά η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας  $V(x, y, z)$ ;

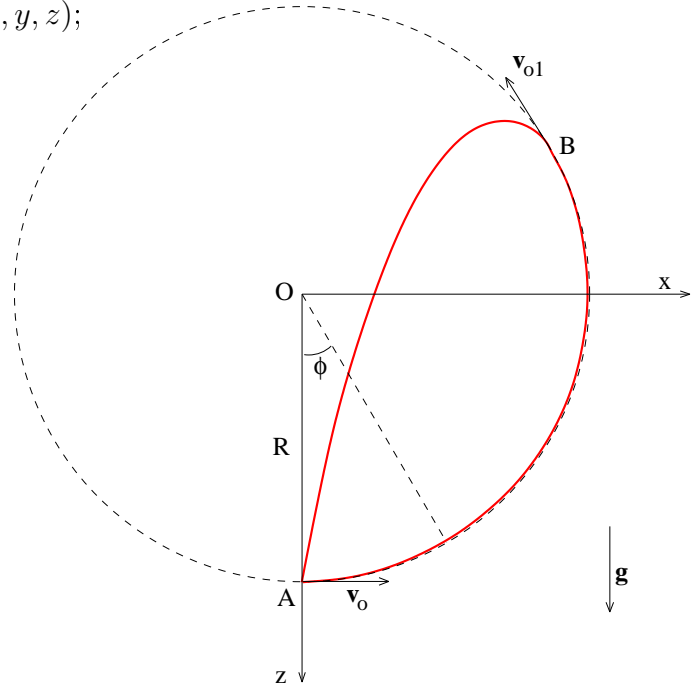
2:

Σώμα μάζας  $m$  είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους  $R$ . Το άλλο άκρο του νήματος  $O$  είναι σταθερό. Στο σημείο  $A$  (κατώτερο) δίνουμε οριζόντια ταχύτητα  $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gR}$ .

Δείξτε ότι όταν το σώμα βρεθεί στη θέση  $\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (όπου  $\phi$  η γωνία από την κατακόρυφο, βλέπε σχήμα), δηλ. όταν  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}R$  και  $z = -\frac{1}{2}R$ , το νήμα παύει να είναι τεντωμένο και η ταχύτητα του σώματος είναι

$$\vec{v}_{01} = \sqrt{\frac{gR}{2}} \left( -\frac{1}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} \right).$$

Μελετήστε τη κίνηση μετά το σημείο αυτό και δείξτε ότι το σώμα περνά από το σημείο εκκίνησης ( $x = 0, z = R$ ).



3:

Σώμα μάζας  $m$  κινείται στον άξονα  $x'Ox$  υπό την επίδραση της δύναμης  $\vec{F} = -\frac{k}{|x|^n}\hat{x}$ , όπου  $k$  θετική σταθερά. Το χρόνο  $t = 0$  το σώμα είναι ακίνητο,  $\dot{x}(t = 0) = 0$ , στη θέση  $x(t = 0) = a > 0$ . Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο σημείο  $x = 0$ , αν η τιμή του εκθέτη  $n$  είναι (α)  $n = -1$ , (β)  $n = 0$ , (γ)  $n = 1/3$ , (δ)  $n = 1$ , (ε)  $n = 2$ , (στ)  $n = 3$ , (ζ)  $n \gg 1$ . (Δώστε απάντηση σε τρεις από τις παραπάνω περιπτώσεις.)

4:

Μελετήστε τη μονοδιάστατη κίνηση σώματος υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από δυναμική ενέργεια  $V(x) = -4a^3x^5 + 10b^3x^2$ , όπου  $x$  η θέση του σώματος σε άξονα  $x'Ox$  και  $a, b$  θετικές σταθερές.

Συγκεκριμένα, απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α) Ποιά τα σημεία ισορροπίας; Είναι ευσταθή ή ασταθή;

(β) Μελετήστε την κίνηση για τυχούσα ενέργεια  $E$ .

(γ) Ποιά η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από το  $x = 0$ ;

(δ) Έστω για  $t = 0$  η θέση του σώματος είναι  $x(t = 0) = \frac{b}{2a}$  και η ταχύτητα  $v(t = 0)$  είναι αρνητική.

Περιγράψτε την κίνηση, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

(δ<sub>1</sub>) το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση και

(δ<sub>2</sub>) το σώμα φτάνει στο  $x = +\infty$ .

συνεχίζεται  
↩

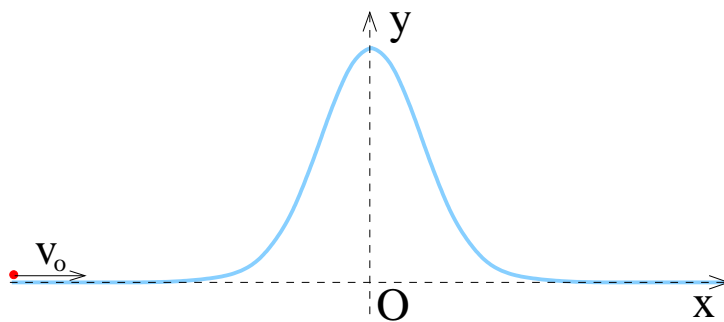
5:

Σώμα κινείται πάνω σε ύψωμα της μορφής  $y = y_0 e^{-(x/a)^2}$ , ξεκινώντας με  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$  από το  $x = -\infty$ .

(α) Αν αμελήσουμε τη βαρύτητα, ποιό το σημείο A στο οποίο το σώμα χάνει την επαφή του με το δρόμο; (Τριβές δεν υπάρχουν.)

(β) Αν υπάρχει βαρύτητα  $\vec{g} = -g\hat{y}$  δείξτε ότι το σώμα δεν μπορεί να χάσει την επαφή του με το δρόμο πριν το σημείο A.

(γ) Δείξτε ότι αν η αρχική ταχύτητα είναι  $v_0 > \sqrt{g \frac{a^2 + 4y_0^2}{2y_0}}$  το σώμα χάνει την επαφή του με το δρόμο μετά το σημείο A και πριν το ανώτερο σημείο του υψώματος.



6:

Μελετήστε το bungee jumping, θεωρώντας ότι η πτώση είναι κατακόρυφη. Το ελαστικό σχοινί έχει μήκος  $\ell$ , μέχρι να τεντωθεί δεν ασκεί καμία δύναμη, ενώ όταν έχει επιμηκυνθεί κατά  $z - \ell$  θεωρούμε ότι ασκεί δύναμη μέτρου  $k(z - \ell)$  με  $k$  σταθερό. Λάβετε υπόψη και την αντίσταση του αέρα, η οποία έχει μέτρο  $C_d \rho S v^2 / 2$ , όπου  $C_d$  αδιάστατη σταθερά,  $\rho$  η πυκνότητα του αέρα,  $S$  η επιφάνεια του σώματος που πέφτει και  $v$  η ταχύτητά του.

(α) Για δεδομένα  $m, g, S, k, \ell, C_d, \rho$ , ποιό είναι το ύψος από το οποίο μπορεί να γίνει η πτώση ώστε ο άνθρωπος μόλις να ακουμπήσει το νερό; Πόσα  $g$  είναι η μέγιστη επιβράδυνση που δέχεται ο άνθρωπος που πέφτει;

(β) Σε πόση απόσταση από το αρχικό σημείο που ξεκινά η πτώση θα φτάσει ο άνθρωπος ανεβαίνοντας;

Εφαρμογή για  $k = 98 \text{ Nm}^{-1}$ , μήκος σχοινού  $\ell = 9 \text{ m}$ , επιτάχυνση βαρύτητας  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ , μάζα του ανθρώπου  $m = 60 \text{ kg}$ , επιφάνεια του ανθρώπου κάθετα στην κίνηση  $S = 1 \text{ m}^2$ , πυκνότητα αέρα  $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$  και  $C_d = 0.5$ .



Υπόδειξη: Η διαφορική εξίσωση  $v \frac{dv}{dz} = a + bv^2 + cz$ , με  $a, b, c$  σταθερές, μπορεί να γραφεί σαν γραμμική,

μη ομογενής  $\frac{df}{dz} - 2bf = 2a + 2cz$ , όπου  $f = v^2$ . Η τελευταία έχει γενική λύση  $f = De^{2bz} - \frac{c}{b}z - \frac{c}{2b^2} - \frac{a}{b}$ .