

Αριθμητική επίλυση 2ου νόμου Νεύτωνα

Γύρω από μια ακίνητη μάζα M κινούνται δύο ίδια σώματα μαζών $m_1 = m_2 = m$, τα οποία συνδέονται με ιδανικό ελατήριο σταθεράς K και μηδενικού φυσικού μήκους. Αμελούμε την βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ των μαζών m_1 και m_2 , οπότε το καθένα από τα σώματα αυτά δέχεται δύο δυνάμεις: βαρυτική από την M και δύναμη από το ελατήριο.

(α) Έστω r_0 η αρχική απόσταση του m_1 από την M και $\Omega = \sqrt{GM/r_0^3}$. Θεωρώντας σύστημα συντεταγμένων με αρχή την μάζα M , δείξτε ότι οι αδιάστατες εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= -\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \kappa(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \\ \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= -\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \kappa(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),\end{aligned}$$

όπου \vec{r}_1, \vec{r}_2 είναι τα διανύσματα θέσης σε μονάδες r_0 , για τις μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, t είναι ο χρόνος σε μονάδες $1/\Omega$ και η αδιάστατη σταθερά $\kappa \equiv K/m\Omega^2$.

Αναλύστε τις εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$, $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $\vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$, $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ και γράψτε αριθμητικό κώδικα για την ολοκλήρωση αυτού του συστήματος.

(β) Προς το παρόν υποθέστε ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί, με αρχικές συνθήκες $x_1 = x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$, $v_{x1} = v_{x2} = v_{z1} = v_{z2} = 0$, $v_{y1} = v_{y2} = v_0$.

(β₁) Είναι η κίνηση επίπεδη;

(β₂) Διερευνήστε το σχήμα της τροχιάς για διάφορες τιμές της v_0 : μικρότερες της μονάδας, ίσης με τη μονάδα και μεγαλύτερες της μονάδας. Από ποιά τιμή και μετά η τροχιά γίνεται ανοικτή και το σώμα διαφεύγει από το πεδίο βαρύτητας της M ;

(β₃) Για τις τιμές της v_0 που η τροχιά είναι κλειστή διαπιστώστε ότι το σχήμα της είναι ελλειπτικό και μετρήστε το μεγάλο άξονα a και την περίοδο κίνησης T . Τοποθετήστε τα αποτελέσματά σας σε διάγραμμα με άξονες $\log a$, $\log T$ (για διάφορες τιμές του v_0) και διαπιστώστε ότι βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία. Ποιά η κλίση της; Ποιός νόμος προκύπτει μεταξύ a και T ;

(γ) Θεωρείστε $v_0 = 1$ και αλλάξτε λίγο τις αρχικές συνθήκες του ερωτήματος (β), για παράδειγμα δώστε x_2 λίγο μεγαλύτερο από το $x_1 = 1$ (μπορείτε επίσης να διαταράξετε τις θέσεις και στην z κατεύθυνση). Διερευνήστε αν οι τροχιές των μαζών είναι κοντά σε κυκλικές ή όχι. Συγκεκριμένα, αλλάζοντας την αδιάστατη σταθερά κ διαπιστώστε ότι για τιμές μικρότερες κάποιας οριακής τιμής κ_0 το σύστημα είναι ασταθές. Ποιά η τιμή κ_0 ;

(Το πρόβλημα αυτό αποτελεί το μηχανικό ανάλογο της μαγνητοπεριστροφικής αστάθειας σε αστροφυσικούς δίσκους προσάυξης, με το ελατήριο να παριστάνει την τάση του μαγνητικού πεδίου.)