

Θέμα 1^ο:

Δίδεται το πεδίο των δυνάμεων $\vec{F} = ax^\mu y^\lambda \hat{i} + ax^{\mu+1} y^{\lambda-1} \hat{j}$.

- α) Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των μ και λ , ώστε το πιο πάνω πεδίο δυνάμεων να είναι διατηρητικό.
β) Να βρείτε το δυναμικό από το οποίο πηγάζουν οι δυνάμεις.

Θέμα 2^ο:

Υλικό σημείο με μάζα m εκτελεί στο επίπεδο Oxy συγχρόνως δύο αρμονικές ταλαντώσεις κατά διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με ίσες γωνιακές συχνότητες $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ και διαφορά φάσεως $\pi/2$.

- α) Να δείξετε ότι η τροχιά του είναι έλλειψη.
β) Να βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο.
γ) Να βρείτε την στροφορμή καθώς και την εμβαδική ταχύτητα του σωματιδίου και να αποδείξετε ότι αυτές παραμένουν σταθερές κατά την κίνηση.
δ) Να αναφέρετε όλες τις ιδιότητες του πεδίου αυτών των δυνάμεων.

Θέμα 3^ο:

Από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της γης πετάμε οριζόντια ένα σώμα με ταχύτητα v_0 . Ζητείται για ποιες τιμές της v_0 θα συμβούν τα ακόλουθα:

- (α) Το σώμα θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της γης ακολουθώντας υπερβολική τροχιά.
(β) Το σώμα θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της γης ακολουθώντας παραβολική τροχιά.
(γ) Το σώμα θα περιστρέφεται γύρω από τη γη με το περίγειο της ελλειπτικής τροχιάς (σημείο ελάχιστης απόστασης από το κέντρο της γης) στην αρχική θέση.
(δ) Το σώμα θα περιστρέφεται ακολουθώντας κυκλική τροχιά.
(ε) Το σώμα θα περιστρέφεται γύρω από τη γη με το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς (σημείο μέγιστης απόστασης από το κέντρο της γης) στην αρχική θέση.
(στ) Το σώμα θα πέσει στη γη.

Η μάζα της γης M , η ακτίνα της γης R , το ύψος h και η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G θεωρούνται γνωστά. Επίσης η γη θεωρείται ακίνητη.

Υπόδειξη: Ένας τρόπος λύσης μπορεί να βασιστεί στο διάγραμμα $V_{\text{eff}}(r)$.

Συγκεκριμένα, στις περιπτώσεις (α), (β), (γ), (δ), (ε), (στ), ισχύει (εξηγήσετε γιατί) $E > 0$, $E = 0$,

$$\frac{dV_{\text{eff}}(R+h)}{dr} < 0, \frac{dV_{\text{eff}}(R+h)}{dr} = 0, \frac{dV_{\text{eff}}(R+h)}{dr} > 0, V_{\text{eff}}(R) < E, \text{ αντίστοιχα.}$$

Θέμα 4^ο:

Δύο αστέρια με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = \lambda m$ αλληλεπιδρούν βαρυτικά.

- (α) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το m_1 βρίσκεται στη θέση $\vec{R}_1|_{t=0} = -a\hat{X}$ και έχει ταχύτητα $\vec{V}_1|_{t=0} = -\beta\sqrt{\frac{Gm}{a}}\hat{Y}$, ποια η θέση και η ταχύτητα του m_2 ώστε το κέντρο μάζας να βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων σε κάθε χρόνο;
(β) Έστω τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι θέσεις και ταχύτητες των αστεριών είναι $\vec{R}_1|_{t=0} = -a\hat{X}$, $\vec{R}_2|_{t=0} = \frac{a}{\lambda}\hat{X}$, $\vec{V}_1|_{t=0} = -\beta\sqrt{\frac{Gm}{a}}\hat{Y}$, $\vec{V}_2|_{t=0} = \frac{\beta}{\lambda}\sqrt{\frac{Gm}{a}}\hat{Y}$. Για ποια σχέση μεταξύ β και λ οι τροχιές είναι κυκλικές;