Πανεπιστήμιο Αθηνών
Εξετάσεις Μηχανικής Ι Μαθηματικού, 10 Φεβρουαρίου 2010
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες
Καλή επιτυχία

Θέμα 1^o:

Α) α) Να δώσετε τον ορισμό του διατηρητικού πεδίου και β) να γράψετε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένα πεδίο διατηρητικό.

Β) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης $\vec{F} = -k\vec{r}$ κατά μήκος της διαδρομής ΟΑ, ΑΒ και ΒΟ, όπου η καμπύλη ΑΒ είναι το ένα τέταρτο της έλλειψης με μεγάλο και μικρό ημιάξονα ΟΑ=α και ΟΒ=β αντίστοιχα.

Θέμα 2^o:

Υλικό σημείο κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F = -kx\,, k > 0$ χωρίς τριβές. Να βρείτε: α) Τη διαφορική εξίσωση της κίνησης καθώς και τη λύση της. β) Το δυναμικό από το οποίο προέρχεται η δύναμη καθώς και την ολική ενέργεια Ε του σημείου και να αποδείξετε ότι αυτή διατηρείται σταθερά. γ) Τα σημεία ισορροπίας και το είδος τους και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του **δυναμικού** καθώς και των **καμπύλων φάσεως** σε ελεύθερη κλίμακα για διάφορες χαρακτηριστικές τιμές της ενέργειας Ε. Επίσης να αποδείξετε τη **μορφή–είδος** των καμπύλων φάσεως.

Θέμα 3^o:

Άνθρωπος στέκει πάνω σε ζυγαριά, στον ισημερινό κάποιου πλανήτη ακτίνας R. Η επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι g. Ποια πρέπει να είναι η διάρκεια της ημέρας στον πλανήτη αυτό ώστε η ζυγαριά να δείχνει το μισό βάρος του πραγματικού;

Εφαρμογή: $R = 6400$ km, $g = 20$ m s^{-2}.

Υπόδειξη: Για ένα τρόπο λύσης θα χρειαστεί η $\vec{a}_\sigma = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_\sigma - \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$.

Θέμα 4^o:

Σώμα κινείται σε πεδίο απωστικής κεντρικής δύναμης αντιστρόφου ανάλογης του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο, $\vec{F} = \dfrac{k}{r^2}\hat{r}$, $k > 0$.

(α) Δείξτε ότι η τροχιά έχει μορφή $r = \dfrac{p}{-1 + \varepsilon\cos\phi}$ με $p = \dfrac{L^2}{mk}$ και ε θετικές σταθερές.

Δίνεται η σχέση $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\dfrac{m}{L^2u^2}\vec{F}\cdot\hat{r}$ που καθορίζει την τροχιά $r = \dfrac{1}{u(\phi)}$ σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων.

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα γράφεται σαν $\vec{v} = \dfrac{k\varepsilon}{L}\sin\phi\ \hat{r} + \dfrac{k}{L}\left(-1 + \varepsilon\cos\phi\right)\hat{\phi}$.

(γ) Αφού βρείτε την δυναμική ενέργεια $V(r)$ γράψτε το ολοκλήρωμα της ενέργειας. Αντικαθιστώντας την θέση και ταχύτητα στο ολοκλήρωμα αυτό δείξτε τη σχέση $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{mk^2}}$ μεταξύ της σταθεράς ε και της ενέργειας E. Διαπιστώστε ότι $E > 0$ συνεπάγεται $\varepsilon > 1$ και άρα η τροχιά είναι υπερβολική.

(δ) Σχεδιάστε την ενεργό δυναμική ενέργεια $V_{\text{eff}}(r)$ και βρείτε τα όρια του r για δεδομένη ενέργεια και στροφορμή.