



Θέμα 1^ο:

Σώμα μάζας m δένεται σε αβαρές νήμα μήκους ℓ . Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το νήμα μόλις που αντέχει το βάρος του σώματος, δηλ. $T_{\max} = mg$ (αν η τάση είναι μεγαλύτερη του mg το νήμα θα σπάσει). Εκτρέπουμε το σώμα κατά ϕ_0 από την κατακόρυφο και το αφήνουμε ελεύθερο. Θα σπάσει το νήμα; Αν ναι, σε ποιά θέση;

Θέμα 2^ο:

Μελετήστε τη μονοδιάστατη κίνηση σώματος υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από δυναμική ενέργεια $V(x) = -2a^5x^7 + 7b^5x^2$, όπου x η θέση του σώματος σε άξονα $x'Ox$ και a, b θετικές σταθερές. Συγκεκριμένα, απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α) Ποιά τα σημεία ισορροπίας; Είναι ευσταθή ή ασταθή;

(β) Ποιά η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από το $x = 0$;

(γ) Ποιά τα όρια κίνησης για τυχούσα ενέργεια E ;

(δ) Έστω για $t = 0$ η θέση του σώματος είναι $x(t = 0) = \frac{b}{2a}$ και η ταχύτητα $v(t = 0)$ είναι αρνητική.

Περιγράψτε την κίνηση, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

(δ₁) το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση και

(δ₂) το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$.

Θέμα 3^ο:

Σώμα διαγράφει ελλειπτική τροχιά εκκεντρότητας ε σε πεδίο ελκτικής κεντρικής δύναμης αντιστρόφου ανάλογης του τετραγώνου της απόστασης από το κέντρο. Όταν το σώμα βρίσκεται στο περίκεντρο της τροχιάς η ταχύτητά του ακαριαία διπλασιάζεται. Δείξτε ότι η νέα τροχιά είναι υπερβολή με εκκεντρότητα $\varepsilon' = \sqrt{16\varepsilon^2 + 24\varepsilon + 9}$.

Θέμα 4^ο:

Δύο ίδια σώματα μάζας $m_1 = m_2 = m$ είναι δεμένα στα άκρα ελατηρίου σταθεράς $k = m\omega^2/2$ και μηδενικού φυσικού μήκους. Το σύστημα είναι ελεύθερο να κινείται στο χώρο και οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στις μάζες είναι αυτές από το ελατήριο. Να βρεθούν οι θέσεις των σωμάτων σαν συνάρτηση του χρόνου $\vec{R}_1(t), \vec{R}_2(t)$ αν οι αρχικές θέσεις και ταχύτητές τους (ως προς αδρανειακό σύστημα $OXYZ$) είναι $\vec{R}_1|_{t=0} = \vec{0}, \vec{R}_2|_{t=0} = X_0\hat{X}, \dot{\vec{R}}_1|_{t=0} = \vec{0}, \dot{\vec{R}}_2|_{t=0} = \omega X_0\hat{Y}$.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις ακόλουθες σχέσεις, αφού εξηγήσετε τι περιγράφουν και τα μεγέθη που περιλαμβάνουν.

$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{R}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau} + \vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau}$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2,\varepsilon\sigma\omega\tau} + \mu \left(\frac{\vec{F}_{2,\varepsilon\xi\omega\tau}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{1,\varepsilon\xi\omega\tau}}{m_1} \right), \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$