



Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εξετάσεις Μηχανικής Ι Μαθηματικού, 26 Φεβρουαρίου 2009

Διάρκεια εξέτασης $2\frac{1}{2}$ ώρες, απαντήστε τα 3 από τα 4 θέματα

Καλή επιτυχία

Θέμα 1^ο:

Ένα δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ κινείται σε σύρμα σχήματος $y = \cosh x$ και η θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου είναι $\vec{r} = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \hat{x} + \sqrt{t^2 + 1} \hat{y}$ (όλα τα μεγέθη στο διεθνές σύστημα μονάδων).

- (α) Ποιά η ταχύτητα σε χρόνο t , ποιό το μέτρο της και ποιό το μοναδιαίο \hat{e} στη διεύθυνσή της;
- (β) Ποιά η επιτάχυνση σε χρόνο t και ποιές οι επιτρόχια και κεντρομόλος συνιστώσες της;
- (γ) Ποιά η ακτίνα καμπυλότητας του σύρματος στη θέση που αντιστοιχεί σε χρόνο t ;
- (δ) Η μόνη δύναμη που ασκείται στο δαχτυλίδι είναι από το σύρμα. Ποιά η δύναμη συτή; Είναι λείο το σύρμα;

Θέμα 2^ο:

Σώμα με $m = 1$ κινείται στον άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση δύναμης που προέρχεται από $V(x) = \sin x$ (όλα στο σύστημα μονάδων mksA).

- (α) Ποιά η εξίσωση κίνησης;
- (β) Ποιά τα σημεία ισορροπίας (ευσταθή και ασταθή);
- (γ) Ποιά η περίοδος της κίνησης μικρού πλάτους γύρω από κάποιο ευσταθές σημείο ισορροπίας;
- (δ) Έστω για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο $x_0 = -11\pi/6$. Δείξτε ότι για να περάσει από το σημείο $x = 0$ πρέπει η αρχική του ταχύτητα να είναι $v_0 > 1$.

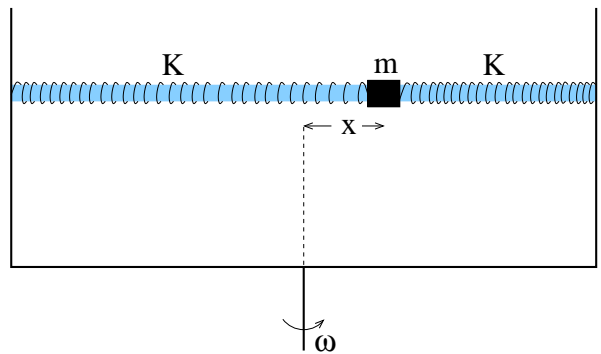
Θέμα 3^ο:

Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\vec{F} = f(r) \hat{r}$ όπου $f(r) = -\frac{k}{r^3}$ και $k > 0$.

Ποιές είναι οι δυνατές τροχιές; Διακρίνετε τις περιπτώσεις όπου η στροφορμή L είναι μικρότερη, ίση, ή μεγαλύτερη από \sqrt{mk} . Δίνεται η εξίσωση $\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$.

Θέμα 4^ο:

Ένα δαχτυλίδι μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε μια οριζόντια ράβδο η οποία είναι στερεωμένη μέσα σε ένα κουτί. Το δαχτυλίδι συνδέεται με τα τοιχώματα του κουτιού μέσω δύο αβαρών ίδιων ελατηρίων σταθεράς K , όπως δείχνει το σχήμα. Το κουτί περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega < \sqrt{2K/m}$.



- (α) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης για την $x(t)$ είναι

$$\ddot{x} + \left(\frac{2K}{m} - \omega^2\right) x = 0.$$

- (β) Αν για $t = 0$ το δαχτυλίδι είναι ακίνητο στη θέση $x(0) = x_0$ βρείτε την συνάρτηση $x(t)$. Τι κίνηση εκτελεί το δαχτυλίδι;

Δίνεται $m\vec{a}_\sigma = \Sigma\vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_\sigma - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$.