



Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εξέταση στη Μηχανική Ι Μαθηματικού, 3 Σεπτεμβρίου 2008

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

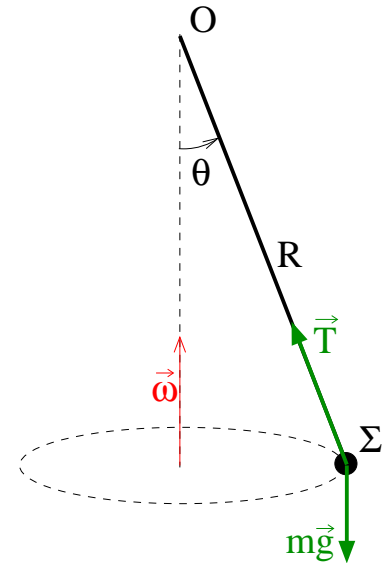
Θέμα 1^ο:

Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους R , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο. Στο σώμα ασκείται το βάρος $m\mathbf{g}$ (με \mathbf{g} = σταθερό) και η τάση του νήματος T . Το σώμα περιστρέφεται σε οριζόντιο πείπεδο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , ώστε η γωνία μεταξύ νήματος και κατακορύφου να είναι θ .

(α) Ποιά η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς και ποιιά η κεντρομόλος δύναμη σαν συνάρτηση των m, ω, R, θ ;

(β) Ποιά η γωνία θ σαν συνάρτηση των g, R, ω ; Σχολιάστε αν υπάρχει ελάχιστη επιτρεπτή τιμή του ω σαν συνάρτηση των g και R .

(γ) Ποιά η τάση του νήματος σαν συνάρτηση των m, R, ω ;



Θέμα 2^ο:

Η δυναμική ενέργεια σώματος μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι $V = 2x^2 - 3x + 1$, όπου το x σε μέτρα και το V σε Joules. Πόσα σημεία ισορροπίας υπάρχουν και ποιιά από αυτά είναι ευσταθή; Ποιές οι περίοδοι ταλαντώσεων γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας;

Θέμα 3^ο:

(α) Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\mathbf{F} = f(r)\hat{r}$. Δείξτε ότι:

(α₁) Η κίνηση είναι επίπεδη.

(α₂) $\dot{\phi} = L/(mr^2)$, όπου L σταθερά (που ισούται με τη στροφορμή).

(α₃) Το $u = 1/r$, θεωρούμενο συνάρτηση του ϕ , ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{mf(1/u)}{L^2u^2}.$$

Δίνεται ότι σε πολικές συντεταγμένες η επιτάχυνση γράφεται $(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi}$.

(β) Βρείτε τη γενική λύση $r = r(\phi)$ για κίνηση σε δύναμη της μορφής

$$f(r) = -\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^3}.$$