



Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εξετάσεις Μηχανικής Ι Μαθηματικού, 7 Σεπτεμβρίου 2007

Διάρκεια εξέτασης $2\frac{1}{2}$ ώρες, απαντήστε τα 3 από τα 4 θέματα

Καλή επιτυχία

Όνοματεπώνυμο: _____, ΑΜ: _____

Θέμα 1^ο:

Ένα δαχτυλίδι μάζας m είναι περασμένο σε ένα οριζόντιο σύρμα σχήματος $y = f(x)$ και κινείται χωρίς τριβές με την συντεταγμένη x να αυξάνει καθώς κυλάει ο χρόνος. Δείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό κατά την κίνηση. Θεωρώντας γνωστό το $|\vec{v}| = v_0$, να βρεθούν η ταχύτητα \vec{v} και η δύναμη που ασκεί το σύρμα στο δαχτυλίδι σαν συνάρτηση του x .

Θέμα 2^ο:

Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται στον άξονα $x'Ox$ κάτω από την επίδραση της δύναμης $F = 4x - x^2$ (όλα τα μεγέθη στο διεθνές σύστημα μονάδων). Η F προέρχεται από δυναμικό το οποίο υποθέτουμε μηδενίζεται στο σημείο $x = 0$.

- (α) Για ποιές τιμές της ενέργειας η κίνηση είναι περατωμένη;
- (β) Αν αρχικά $x = 4$, για ποιά αρχική ταχύτητα το σώμα φτάνει στο $x \rightarrow -\infty$;

Θέμα 3^ο:

Από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της γης εκτοξεύουμε οριζόντια ένα σώμα με ταχύτητα v_0 .

- (α) Ποιά η στροφορμή του σώματος;
- (β) Ποιά η ενέργεια του σώματος;
- (γ) Ποιά πρέπει να είναι η v_0 ώστε το σώμα μόλις να διαφύγει στο $r \rightarrow \infty$;
- (δ) Ποιά πρέπει να είναι η v_0 ώστε το σώμα να διαφύγει στο $r \rightarrow \infty$ και η ταχύτητά του εκεί να είναι $v_0/2$;
- (ε) Ποιά πρέπει να είναι η v_0 ώστε το σώμα να εκτελέσει τροχιά η οποία να εφάπτεται της γης σε κάποιο σημείο Γ ; Ποιά η ταχύτητα του σώματος στο σημείο Γ ;

Η σταθερά παγκόσμιας έλξης G , η ακτίνα και η μάζα της γης (R, M) θεωρούνται γνωστά.

Θέμα 4^ο:

Σε σώμα μάζας m που κινείται στον $x'Ox$ άξονα επιδρά δύναμη $-m\omega_0^2x - 2m\gamma\dot{x} + mf_0 \cos(\omega t)$, με $0 < \gamma < \omega_0/\sqrt{2}$. Βρείτε την $x(t)$. Τι κίνηση εκτελεί το σώμα; Δείξτε ότι η κίνηση σε μεγάλους χρόνους ($t \gg 1/\gamma$) είναι απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ω . Σχεδιάστε το πλάτος αυτής της ταλάντωσης σαν συνάρτηση του ω (θεωρώντας σταθερά τα γ, ω_0 και f_0). Πότε γίνεται μέγιστο;