



Όνοματεπώνυμο: \_\_\_\_\_, ΑΜ: \_\_\_\_\_

Θέμα 1<sup>ο</sup>:

(α) Πως αναλύεται η εξίσωση του Newton χρησιμοποιώντας την επιτόχια και κεντρομόλο επιτάχυνση;  
(β) Σώμα μάζας  $m$  είναι δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους  $R$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακίνητο. Στο σώμα, εκτός το βάρος  $m\mathbf{g}$  (με  $\mathbf{g} = \text{σταθερό}$ ) και την τάση του νήματος  $T$ , ασκείται και αντίσταση από τον αέρα η οποία είναι αντίθετη της ταχύτητας και έχει μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της,  $|F_a| = mkv^2$ ,  $k = \text{σταθερά}$ . Θεωρείστε ότι η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος βρίσκεται στο επίπεδο που σχηματίζουν το νήμα και η κατακόρυφη, οπότε η κίνηση γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο.

Να μελετηθεί η κίνηση και συγκεκριμένα:

(β<sub>1</sub>) Να βρεθούν οι  $\dot{v} = \alpha_\varepsilon(v, \theta)$  και  $T = T(v, \theta)$ , όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ νήματος και κατακορύφου.

(β<sub>2</sub>) Η διαφορική εξίσωση που δίνει την  $\theta(t)$ . (Χρησιμοποιήστε τη σχέση μεταξύ  $v$  και  $\theta$ .)

(β<sub>3</sub>) Η διαφορική εξίσωση που δίνει την  $v(\theta)$ . (Αλλάξτε μεταβλητή από  $t$  σε  $\theta$  στην  $\dot{v} = \alpha_\varepsilon(v, \theta)$ .)

Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή γράφεται  $dv^2/d\theta \pm 2kRv^2 = -2gR \sin \theta$  και επιλύστε την ως προς  $v^2$ .

(β<sub>4</sub>) Αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο  $\theta = 0$  και έχει ταχύτητα  $v_0$ , ποιά πρέπει να είναι η  $v_0$  ώστε να φτάσει με μηδενική ταχύτητα στη θέση  $\theta = \pi/2$ ;

Θέμα 2<sup>ο</sup>:

Σώμα με μοναδιαία μάζα κινείται στον  $x'Ox$  άξονα κάτω από την επίδραση δύναμης που προέρχεται από δυναμικό  $V(x) = 1 - \cos x$ .

(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σώματος.

(β) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας (ευσταθή και ασταθή).

(γ) Το σώμα αρχικά βρίσκεται στο  $x = 0$  και έχει αρχική ταχύτητα  $u > 0$ . Υποθέτοντας ότι για την κίνηση που ακολουθεί  $|x(t)| \ll \pi/2$ , βρείτε την συνάρτηση  $x(t)$ . Ποιά η περίοδος της κίνησης;

(δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του  $V(x)$  δείξτε ότι αν η ταχύτητα που έχει το σώμα στο  $x = 0$  είναι θετική και μεγαλύτερη κάποιας οριακής τιμής  $u_0$  (την οποία και να βρείτε) το σώμα διαφεύγει στο  $x \rightarrow +\infty$ .

Θέμα 3<sup>ο</sup>:

Σώμα μάζας  $m$  κινείται σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων  $F = -k/r^n$ ,  $k > 0$ ,  $n > 1$ ,  $n \neq 3$ .

(α) Ποιά η δυναμική ενέργεια; Διαλέξτε τη σταθερά ώστε να μηδενίζεται στο  $r \rightarrow \infty$ .

(β) Αν το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας  $r_0$ , ποιά το  $r_0$  για δοσμένη στροφορμή του σώματος  $L$ ; Ποιά η ενέργεια  $E_0$ ;

(γ) Για ποιές τιμές του εκθέτη  $n$  η κυκλική τροχιά  $r = r_0$  είναι ευσταθής; (Θεωρείστε ότι η διαταραγμένη τροχιά έχει ίδια στροφορμή με την κυκλική τροχιά.)

(δ) Έστω το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά  $r = r_0$ , έχει στροφορμή  $L$  και η τιμή του εκθέτη είναι  $1 < n < 3$ . Κάποια στιγμή δίνουμε ενέργεια  $\Delta E$  χωρίς να αλλάξουμε τη στροφορμή. Για ποιές τιμές του  $\Delta E$  η κίνηση παραμένει περατωμένη;

Ποιά το σχήμα της περατωμένης τροχιάς αν  $n = 2$ ; (Απόδειξη δεν ζητείται.)

Θέμα 4<sup>ο</sup>:

Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση υπό την επίδραση της δύναμης  $F = c - kx$ . Να βρεθεί η κίνηση για τυχούσες αρχικές συνθήκες  $x(t=0) = x_0$ ,  $v(t=0) = v_0$ .

Δίνονται η μάζα του σώματος  $m$  και οι θετικές σταθερές  $k$  και  $c$ .