Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 10 Σεπτεμβρίου 2021
Διάρκεια εξέτασης $1\frac{1}{2}$ ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____________________, AM: ____________

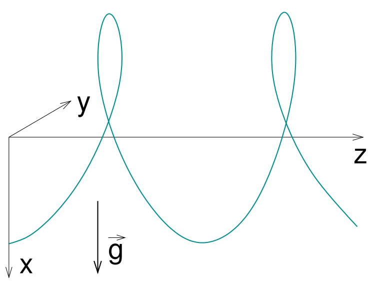
Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1^o:

Σώμα μάζας $m = 2$ κινείται στον άξονα x σε πεδίο $V = -x\,|x|^{2n+1}$, όπου n θετική σταθερά.
Αρχικά βρίσκεται στη θέση $x = 1$ και κινείται με ταχύτητα $\dot{x} < 0$.
(α) Σχεδιάστε το γράφημα της δυναμικής ενέργειας.
(β) Περιγράψτε την κίνηση του σώματος για τρεις τιμές της ενέργειας, $E < 0$, $E > 0$ και $E = 0$.
(γ) Σχεδιάστε τις αντίστοιχες καμπύλες φάσης.
(δ) Αν $E = 0$ βρείτε τη θέση σε κάθε χρόνο.

Θέμα 2^o:

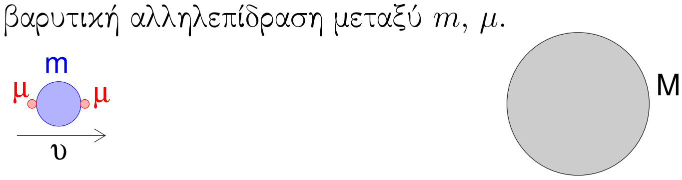
Δαχτυλίδι μάζας m κινείται περασμένο σε λείο σύρμα με σχήμα οριζόντιας έλικας ακτίνας R. Η εξίσωση της έλικας είναι $\{\varpi = R,\ z = \phi\, R \tan\mu\}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου μ σταθερή οξεία γωνία. Εκτός του βάρους $mg\hat{x}$ και της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$, στο δαχτυλίδι ασκείται και αντίσταση $-2mk\vec{v}$.



(α) Ποια η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την $\phi(t)$;
★ (β) Ποια η αντίδραση $\vec{N}$ συναρτήσει των ϕ, $\dot{\phi}$;
(γ) Έστω ότι ισχύει $\cos\mu = k\sqrt{R/g}$, το δαχτυλίδι βρίσκεται αρχικά στη θέση $\phi|_{t=0} = 0$ και έχει «μικρή» αρχική ταχύτητα μέτρου v_0. Ποια η θέση του δαχτυλιδιού σε κάθε χρόνο; Τι σημαίνει «μικρή» v_0;
(δ) Έστω μεταφέρουμε την έλικα στο διεθνή διαστημικό σταθμό. Ποια είναι τώρα η εξίσωση κίνησης;
Δίνεται $\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\varpi} - \sin\phi\,\hat{\phi}$ και η έκφραση της επιτάχυνσης $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (2\dot{\varpi}\dot{\phi} + \varpi\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.
Για ευκολία στους υπολογισμούς μπορείτε να θέσετε σε όλο το θέμα $m = 1$, $R = 1$, $g = 1$.

Θέμα 3^o:

Στο βαρυτικό πεδίο μιας ακίνητης μελανής οπής Schwarzschild μάζας M και ακτίνας $r_M = 2GM/c^2$ (όπου c η ταχύτητα του φωτός) κινείται σφαιρική μάζα m ακτίνας $r_m \ll r_M$. Στη μάζα m έχουν συγκολληθεί με κόλλα που αντέχει δύναμη F (πρέπει να ασκήσουμε δύναμη F για να υπάρξει αποκόλληση) δύο πολύ μικρά σώματα μάζας μ – βλέπε σχήμα. Το συσσωμάτωμα κινείται ευθύγραμμα προς την M.
Θεωρούμε τη βαρύτητα Νευτώνεια και αγνοούμε τη βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ m, μ.

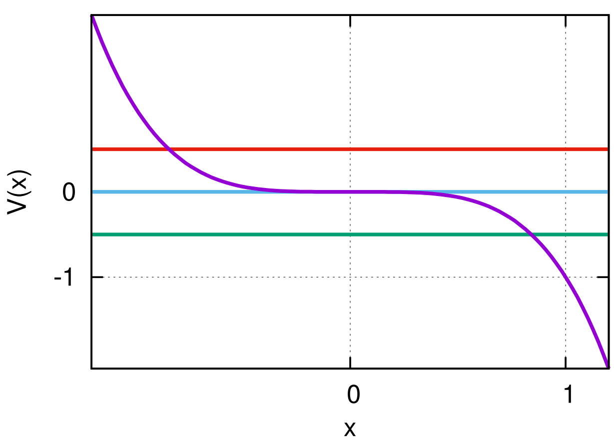


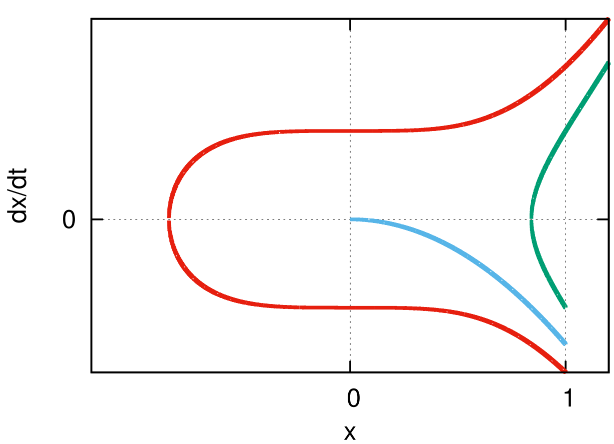
(α) Σε ποια απόσταση R από την M θα αποκολληθούν οι μάζες λόγω της παλιρροϊκής δύναμης;
(β) Στο σύμπαν υπάρχουν διαφόρων μεγεθών μελανές οπές, από αστρικές με μάζες μερικές Ηλιακές, μέχρι υπερμεγέθεις στα κέντρα των γαλαξιών με μάζες μέχρι δισεκατομμύρια Ηλιακές. Σε ποιες θα στέλνατε ένα διαστημόπλοιο με σκοπό να μην διαμελιστεί πριν φτάσει στον ορίζοντα γεγονότων;
(γ) Κάποια στιγμή το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε απόσταση r_i από την M και κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_i$ με φορά προς την M. Πόση επιπλέον ταχύτητα v' κάθετα στην $\vec{v}_i$ πρέπει να δώσουμε στο συσσωμάτωμα ώστε να μην πλησιάσει σε απόσταση μικρότερη της R από την μάζα M;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Η συνάρτηση είναι περιττή και άρα αρκεί να μελετηθεί στα θετικά x. Για $x > 0$ είναι $V = -x^{2n+2}$, $V' = -(2n+2)x^{2n+1} < 0$, άρα είναι φθίνουσα, μεταβάλλεται από 0 στο $x = 0$ μέχρι $-\infty$ για $x \to +\infty$. Το γράφημα δίδεται παρακάτω, μαζί με το διάγραμμα φάσης.
(β) Για $E < 0$ το σώμα ανακλάται στο σημείο όπου $V(x) = E \Leftrightarrow x = (-E)^{1/(2n+2)}$ (θετικό) και κατόπιν κινείται συνεχώς προς μεγαλύτερα x, μέχρι το άπειρο.
Για $E > 0$ το σώμα ανακλάται στο σημείο όπου $V(x) = E \Leftrightarrow x = E^{1/(2n+2)}$ (αρνητικό) και κατόπιν κινείται συνεχώς προς μεγαλύτερα x, μέχρι το άπειρο.
Για $E = 0$ το σώμα κινείται επ΄ άπειρον προς το $x = 0$, το σημείο καμπής της $V(x)$, διότι όσο πλησιάζει τόσο η ταχύτητα όσο και η δύναμη μηδενίζονται.
(γ) Οι καμπύλες για μια θετική ενέργεια (κόκκινη), μια αρνητική (πράσινη) και την μηδενική (μπλε) φαίνονται παρακάτω.





(δ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας δίνει $\dot{x}^2 = x\,|x|^{2n+1}$. Όσο $x > 0$ και $\dot{x} < 0$ προκύπτει $\dot{x} = -x^{n+1} \Leftrightarrow$
$$\int_1^x x^{-n-1}dx = -\int_0^t dt \Leftrightarrow x = (1 + n\,t)^{-1/n}.$$
Για $t \to \infty$ είναι $x \to 0$ όπως αναμέναμε.

Θέμα 2ο:

(α) $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - 2mk\vec{v}$ με $\vec{N} \perp \vec{v}$. Άρα η προβολή πάνω στην ταχύτητα δίνει $\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{v}\cdot\vec{g} - 2kv^2$. Αντικαθιστώντας $\vec{g} = g\hat{x} = g\,(\cos\phi\ \hat{\varpi} - \sin\phi\ \hat{\phi})$, $\vec{v} = \dot{\phi}R\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}$, $\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$ με $\dot{z} = \dot{\phi}R\tan\mu$, $\ddot{z} = \ddot{\phi}R\tan\mu$, $\vec{v}\cdot\vec{a} = \dfrac{\dot{\phi}\ddot{\phi}R^2}{\cos^2\mu}$, $v^2 = \dfrac{\dot{\phi}^2R^2}{\cos^2\mu}$, βρίσκουμε $\ddot{\phi} + 2k\dot{\phi} + \dfrac{g}{R}\cos^2\mu\ \sin\phi = 0$.
(β) Από το νόμο Νεύτωνα $\vec{N} = m\vec{a} - m\vec{g} + 2mk\vec{v}$. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις από το (α) ερώτημα και την $\ddot{\phi}$ από την εξίσωση κίνησης βρίσκουμε $\vec{N} = mg\sin\mu\ \sin\phi(\sin\mu\,\hat{\phi} - \cos\mu\,\hat{z}) - m(R\dot{\phi}^2 + g\cos\phi)\hat{\varpi}$.
(γ) $\phi|_{t=0} = 0$ σημαίνει ότι αρχικά το δαχτυλίδι βρίσκεται στην κατώτερη θέση $x = R$. Για «μικρή» αρχική ταχύτητα θα μείνει κοντά σ΄ αυτή, δηλ. θα είναι $|\phi| \ll 1$ σε κάθε χρόνο. Η εξίσωση κίνησης, με $\sin\phi \approx \phi$ γίνεται $\ddot{\phi} + 2k\dot{\phi} + k^2\phi = 0$. Περιγράφει φθίνουσα ταλάντωση με κρίσιμη απόσβεση, διότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα την $-k$. Η γενική λύση είναι $\phi = (C_1 + C_2t)e^{-kt}$. Οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν τις σταθερές. Η $\phi|_{t=0} = 0$ δίνει $C_1 = 0$ και η $\dot{\phi}|_{t=0} = \pm\dfrac{v_0k}{\sqrt{gR}}$ (από $v^2 = \dfrac{\dot{\phi}^2R^2}{\cos^2\mu}$ με $\cos\mu = k\sqrt{R/g}$) δίνει $C_2 = \pm\dfrac{v_0k}{\sqrt{gR}}$. Τελικά η λύση είναι $\phi = \pm\dfrac{v_0}{\sqrt{gR}}kte^{-kt}$. Σε μεγάλους χρόνους (πρακτικά μερικές φορές το $1/k$) το δαχτυλίδι θα καταλήξει ακίνητο στην κατώτερη θέση $\phi = 0$.
Η απόλυτη τιμή της γωνίας $|\phi| = \dfrac{v_0}{\sqrt{gR}}kte^{-kt}$ έχει χρονική παράγωγο $\dfrac{d|\phi|}{dt} = \dfrac{v_0k}{\sqrt{gR}}(1 - kt)e^{-kt}$, οπότε αυξάνεται μέχρι την στιγμή $t = 1/k$ και μετά μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί. Η μέγιστη τιμή της είναι $\dfrac{v_0}{e\sqrt{gR}}$. Για να ισχύει πράγματι $|\phi| \ll 1$ σε κάθε χρόνο πρέπει $v_0 \ll e\sqrt{gR}$. Δηλ. «μικρή» v_0 σημαίνει μικρή σε σύγκριση με την τιμή $e\sqrt{gR}$.
(δ) Προσθέτοντας την υποθετική δύναμη $-m\vec{a}_0 = -m\vec{g}$ είναι ισοδύναμο με το να αφαιρέσουμε το βάρος, οπότε ισχύει $\ddot{\phi} + 2k\dot{\phi} = 0$.
Έχουμε θεωρήσει αμελητέα τη μικρή διαφορά του $\vec{g}$ μεταξύ των θέσεων του δαχτυλιδιού και του κέντρου μάζας του σταθμού. Επίσης έχουμε θεωρήσει αμελητέα την πολύ αργή περιστροφή του σταθμού γύρω από κέντρο μάζας του (που γίνεται για να κοιτάζει συνεχώς προς τη Γη), δηλ. την περιστροφή του συστήματος $Oxyz$ και τις αντίστοιχες υποθετικές δυνάμεις φυγόκεντρο και Coriolis.

Θέμα 3^o:

(α) Η παλιρροϊκή δύναμη $\mu\Delta g = \dfrac{2GM\mu r_m}{R^3}$, όπου R η απόσταση μεταξύ M και m, τείνει να αποκολλήσει και τις δύο μάζες μ.
Αν $\hat{x}$ ο άξονας από την M προς την m, η επιτάχυνση βαρύτητας στις θέσεις των μικρών μαζών $(R \pm r_m)\hat{x}$ είναι $\vec{g}_{\pm} = -\dfrac{GM}{(R\pm r_m)^2}\hat{x} = -\dfrac{GM}{R^2}\left(1 \pm \dfrac{r_m}{R}\right)^{-2}\hat{x}$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς $\dfrac{r_m}{R} \ll 1$ (ισχύει αφού $r_m \ll r_M < R$) βρίσκουμε $\vec{g}_{\pm} \approx -\dfrac{GM}{R^2}\hat{x} \pm \dfrac{2GMr_m}{R^3}\hat{x}$. Άρα $\Delta\vec{g} = \pm\dfrac{2GMr_m}{R^3}\hat{x}$, με φορά από την επιφάνεια της m προς τα έξω και στις δύο θέσεις των μικρών μαζών.
Οι μάζες αποκολλούνται ταυτόχρονα, όταν $\dfrac{2GM\mu r_m}{R^3} = F \Leftrightarrow R = \left(\dfrac{2GM\mu r_m}{F}\right)^{1/3}$.

(β) Το διαστημόπλοιο θα διαμελιστεί πριν φτάσει στον ορίζοντα γεγονότων αν ισχύει $R > r_M \Leftrightarrow \left(\dfrac{2GM\mu r_m}{F}\right)^{1/3} > \dfrac{2GM}{c^2} \Leftrightarrow F < \dfrac{c^6\mu r_m}{4G^2M^2}$. Είναι προτιμότερο λοιπόν να στείλουμε το διαστημόπλοιο σε μεγάλης μάζας μελανή οπή, αφού η οριακή δύναμη F που απαιτείται για να μη διαμελιστεί είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μάζας.
Ο λόγος είναι ότι η οριακή παλιρροϊκή δύναμη είναι μεν ανάλογη της μάζας, αλλά και αντιστρόφως ανάλογη του κύβου της απόστασης, που είναι ανάλογος με τον κύβο της μάζας. Άρα τελικά είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μάζας.

(γ) Η περιοχή κίνησης καθορίζεται από την ανισότητα $V_{\text{eff}}(r) \leq E$. Για να μην φτάσει το συσσωμάτωμα σε αποστάσεις μικρότερες της R από τη μάζα M πρέπει να ισχύει $V_{\text{eff}}(R) \geq E$. Αντικαθιστώντας την ενεργό δυναμική ενέργεια $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r}$, τη στροφορμή $L = mr_iv'$ και την ενέργεια $E = \dfrac{m}{2}(v_i^2 + v'^2) - \dfrac{GMm}{r_i}$ προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει $\dfrac{r_i^2v'^2}{2R^2} - \dfrac{GM}{R} \geq \dfrac{1}{2}(v_i^2 + v'^2) - \dfrac{GM}{r_i} \Leftrightarrow$

$$v' \geq \sqrt{\frac{v_i^2 + (r_i/R - 1)2GM/r_i}{r_i^2/R^2 - 1}}.$$