Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξέταση στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 20 Μαΐου 2021
(Εξ αποστάσεως μέσω των «Ασκήσεων» της η-Τάξης)
Διάρκεια εξέτασης 90 λεπτά, Καλή επιτυχία

1η ερώτηση (αντιστοίχηση για 1 μονάδα):
Κρίνετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

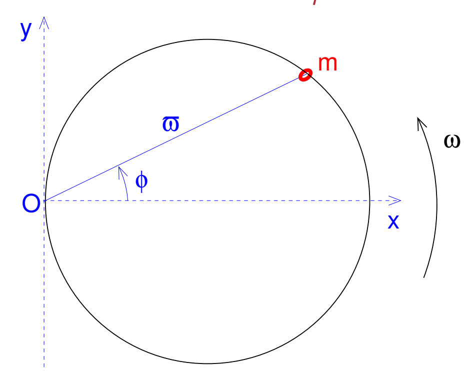
• Οι τροχιές σωματίων σε πεδίο δύναμης $\vec{F} = F(r,\theta,\phi)\hat{r}$ (σε σφαιρικές συντεταγμένες) είναι επίπεδες.
Απάντηση: Σωστή. Αφού $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ η στροφορμή ως προς το κέντρο διατηρείται και άρα η κίνηση γίνεται σε επίπεδο $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$, κάθετο στην στροφορμή. Η γνωστή αυτή ιδιότητα των κεντρικών δυνάμεων ισχύει ακόμα και αν δεν είναι ισοτροπικές, αν δηλ. το μέτρο τους εξαρτάται και από την κατεύθυνση, όχι μόνο από την απόσταση από το κέντρο.

• Ο τρίτος νόμος Κέπλερ ισχύει για ένα σωμάτιο που κινείται υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης της μορφής $\vec{F} = -\frac{k}{r}\hat{r}$.
Απάντηση: Λάθος. Ο τρίτος νόμος Κέπλερ ισχύει μόνο για ελκτικές δυνάμεις αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της απόστασης. Εύκολα βρίσκουμε αντιπαράδειγμα, π.χ. για κυκλικές τροχιές ισχύει $\frac{k}{r} = m\omega^2 r \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{k/m}}{r}$ και άρα το τετράγωνο της περιόδου $2\pi/\omega$ είναι ανάλογο του τετραγώνου (και όχι του κύβου) της ακτίνας.

• Ένα διατομικό μόριο αποτελείται από δύο σημειακές μάζες m_1, m_2 που συνδέονται μεταξύ τους με δυναμικό το οποίο συμπεριφέρεται ως ελατήριο σταθεράς k. Η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων του μορίου (κατά μήκος του άξονά του) είναι $\omega = \sqrt{k/(m_1+m_2)}$.
Απάντηση: Λάθος. Είναι πρόβλημα δύο σωμάτων και η απόσταση μεταξύ των μαζών r ικανοποιεί την $\mu\ddot{r} = -k(r-\ell_0)$ όπου $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ η ανηγμένη μάζα (ℓ_0 είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου). Άρα η συχνότητα ταλαντώσεων είναι $\omega = \sqrt{k/\mu}$.

• Το πεδίο βαρύτητας στο εσωτερικό ενός μη-ομογενούς σφαιρικού φλοιού είναι μηδέν.
Απάντηση: Λάθος. Το θεώρημα του Νεύτωνα για φλοιούς ισχύει μόνο αν η επιφανειακή πυκνότητα είναι σταθερή (μόνο αν η κατανομή μάζας είναι σφαιρικά συμμετρική το πεδίο βαρύτητας είναι $-\frac{GM_{\varepsilon\gamma\kappa}}{r^2}\hat{r}$).

2η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες):
Δαχτυλίδι μάζας $m = 2$ κινείται περασμένο στο λείο, οριζόντιο σύρμα του σχήματος που έχει εξίσωση $\varpi = \cos\phi$ και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1$ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το σημείο του O. Ποια η εξίσωση κίνησης του δαχτυλιδιού;
Υπόδειξη: Βρείτε στο περιστρεφόμενο σύστημα Oxy την κινητική ενέργεια και την δυναμική της φυγόκεντρου, συναρτήσει της $\phi(t)$.
Απάντηση: $\dot{\phi}^2 - \cos^2\phi =$ σταθερά. Η λύση καλύπτεται από το ερώτημα (α) του θέματος 1 παρακάτω.



3η ερώτηση (αντιστοίχηση για 2 μονάδες), 1η παραλλαγή:
Σώμα μάζας $m = 2$ κινείται σε δυναμικό $V(x) = -\cos^2 x$. Αρχικά βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $\dot{x} = v_0$. Τι κίνηση θα κάνει τελικά αν (1) $v_0 = 0$, (2) $v_0 = 0.01$, (3) $v_0 = 0.5$, (4) $v_0 = 1$; Επιλέξτε τις απαντήσεις μεταξύ των επιλογών: (Α) ταλάντωση μεταξύ των θέσεων $\pm\pi/6$, (Β) ταλάντωση μεταξύ των θέσεων $\pm\pi/12$, (Γ) ταλάντωση $x = 0.005\sin(2t)$, (Δ) ταλάντωση $x = 0.01\sin t$, (Ε) ακίνητο.
Απάντηση: 1→Ε, 2→Δ, 3→Α, 4→Ε. Η λύση ουσιαστικά καλύπτεται από το ερώτημα (β) και (γ) του θέματος 1 παρακάτω.

3η ερώτηση (αντιστοίχηση για 2 μονάδες), 2η παραλλαγή:
Σώμα μάζας $m = 2$ κινείται σε δυναμικό $V(x) = -\cos^2(2x)$. Αρχικά βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $\dot{x} = v_0$. Τι κίνηση θα κάνει τελικά αν (1) $v_0 = 0$, (2) $v_0 = 0.01$, (3) $v_0 = 0.5$, (4) $v_0 = 1$; Επιλέξτε τις απαντήσεις μεταξύ των επιλογών: (Α) ταλάντωση μεταξύ των θέσεων $\pm\pi/6$, (Β) ταλάντωση μεταξύ των θέσεων $\pm\pi/12$, (Γ) ταλάντωση $x = 0.005\sin(2t)$, (Δ) ταλάντωση $x = 0.01\sin t$, (Ε) ακίνητο.

Απάντηση: 1→Ε, 2→Γ, 3→Β, 4→Ε. Η λύση ουσιαστικά καλύπτεται από το ερώτημα (β) και (γ) του θέματος 1 παρακάτω.

4η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 2 μονάδες), 1η παραλλαγή:

Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης έχοντας ενέργεια E, στροφορμή L και δυναμική ενέργεια $V(r) = -\dfrac{L^2}{2mr^2}\left(1+\dfrac{b^2}{r^2}\right)$, όπου b σταθερά. Ποια η τροχιά του στην ειδική περίπτωση όπου αρχικά ισχύουν $r = b$, $\phi = 0$ και $v_r = v_\phi = L/mb$;

Υπόδειξη: Συνδυάζοντας τα ολοκληρώματα ενέργειας και στροφορμής δείξτε ότι η εξίσωση τροχιάς του σώματος δίνεται από σχέση της μορφής $\phi(r) = \pm \displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\cdots}}$.

Απάντηση: $r = b(1+\phi)$. Η λύση καλύπτεται από το ερώτημα (δ) του θέματος 2 παρακάτω.

4η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 2 μονάδες), 2η παραλλαγή:

Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης έχοντας ενέργεια E, στροφορμή L και δυναμική ενέργεια $V(r) = -\dfrac{L^2}{2mr^2}\left(1+\dfrac{b^2}{r^2}\right)$, όπου b σταθερά. Στην ειδική περίπτωση όπου αρχικά ισχύουν $r = b$, $\phi = 0$, $v_r = 0$ και $v_\phi = L/mb$ βρείτε τη γωνία ϕ που διαγράφει το σώμα μέχρι να φτάσει στο $r = 0$.

Υπόδειξη: Συνδυάζοντας τα ολοκληρώματα ενέργειας και στροφορμής δείξτε ότι ισχύει $\phi(r) = \pm \displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\cdots}}$.

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} = 1.311$.

Απάντηση: 1.311 rad. Η λύση καλύπτεται από το ερώτημα (ε) του θέματος 2 παρακάτω.

5η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1 μονάδα):

Μία σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας είναι αρχικά ακίνητη, με σταθερή πυκνότητα ρ_0. Λόγω της ιδιοβαρύτητάς της, κάθε μάζα που αρχικά βρίσκεται σε ακτίνα r_0 θα φτάσει στο κέντρο σε χρόνο t_0. Βρείτε το χρόνο t_0 με διαστατική ανάλυση (εξαρτάται από τα ρ_0, r_0 και τη σταθερά G).

Απάντηση: $t_0 \propto 1/\sqrt{G\rho_0}$. Η λύση καλύπτεται από το ερώτημα (α) του θέματος 3 παρακάτω.

6η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1 μονάδα):

Για την προηγούμενη κατανομή ποια είναι η δύναμη που δέχεται κάποια μάζα m που βρίσκεται αρχικά στη θέση r_0 και σε κάποιο μεταγενέστερο χρόνο στη θέση r;

Υπόδειξη: Η συνολική μάζα $M_{\varepsilon\gamma\kappa}$ που βρίσκεται εντός της σφαίρας ακτίνας r παραμένει σταθερή παρότι το r αλλάζει με το χρόνο (γιατί όλες οι μάζες κινούνται προς το κέντρο χωρίς να προσπερνούν η μία την άλλη). Μπορεί να βρεθεί την αρχική στιγμή που γνωρίζουμε την πυκνότητα.

Απάντηση: $-\dfrac{Gm\rho_0(4\pi r_0^3/3)}{r^2}\hat{r}$. Η λύση καλύπτεται από το ερώτημα (β_1) του θέματος 3 παρακάτω.

7η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 1η παραλλαγή:

Βρείτε ακριβώς το χρόνο t_0 όπου η μάζα της προηγούμενης κατανομής φτάνει στο κέντρο θεωρώντας δεδομένο ότι η δύναμη που δέχεται είναι $-m\lambda/r^2$.

Υπόδειξη: Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης και κατόπιν το χρόνο στον οποίο μηδενίζεται η ακτίνα.

Δίνεται $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1/\xi - 1}} = \frac{\pi}{2}$.

Απάντηση: $t_0 = \sqrt{\dfrac{\pi^2 r_0^3}{8\lambda}}$. Η λύση καλύπτεται από το ερώτημα (β_2) του θέματος 3 παρακάτω.

7η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 2η παραλλαγή:

Βρείτε ακριβώς το χρόνο t_0 όπου η μάζα της προηγούμενης κατανομής φτάνει στο κέντρο θεωρώντας δεδομένο ότι η δύναμη που δέχεται είναι $-m\lambda r_0^3/r^2$.

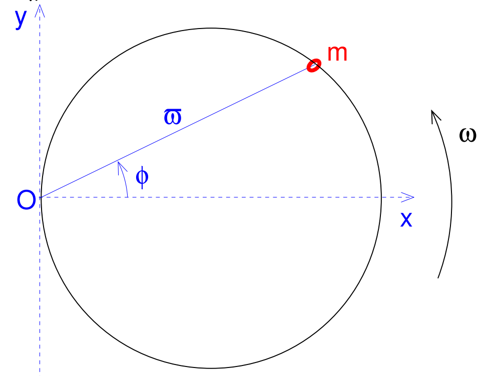
Υπόδειξη: Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης και κατόπιν το χρόνο στον οποίο μηδενίζεται η ακτίνα.

Δίνεται $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1/\xi - 1}} = \frac{\pi}{2}$.

Απάντηση: $t_0 = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{8\lambda}}$. Η λύση καλύπτεται από το ερώτημα (β_2) του θέματος 3 παρακάτω.

Θέμα 1^o:

Δαχτυλίδι μάζας $m=2$ κινείται περασμένο στο λείο, οριζόντιο σύρμα του σχήματος που έχει εξίσωση $\varpi=\cos\phi$ και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega=1$ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το σημείο του O.



(α) Βρείτε στο περιστρεφόμενο σύστημα Oxy την κινητική ενέργεια και την δυναμική της φυγόκεντρου, συναρτήσει της $\phi(t)$. Ποιο το ολοκλήρωμα «ενέργειας» που αποτελεί την εξίσωση κίνησης;

(β) Μελετήστε την συνάρτηση «δυναμικής ενέργειας» και κάντε το γράφημά της.

(γ) Αρχικά το δαχτυλίδι βρίσκεται στη θέση $\phi=0$ και έχει αρχική ταχύτητα $0\le v_0\le 1$.

(γ_1) Περιγράψτε την κίνηση για διάφορα v_0.

(γ_2) Βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο αν $v_0\ll 1$.

Θέμα 2^o:

Σώμα μάζας m κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης έχοντας ενέργεια E, στροφορμή L και δυναμική ενέργεια $V(r)=-\dfrac{L^2}{2mr^2}\left(1+\dfrac{b^2}{r^2}\right)$, όπου b σταθερά.

(α) Βρείτε και σχεδιάστε την $V_{\rm eff}(r)$.

(β) Αν αρχικά το σώμα απομακρύνεται από το κέντρο, για ποιες ενέργειες εκτελεί περατωμένη κίνηση και για ποιες όχι;

(γ) Συνδυάζοντας τα ολοκληρώματα ενέργειας και στροφορμής δείξτε ότι η εξίσωση τροχιάς του σώματος δίνεται από $\phi(r)=\pm\displaystyle\int\frac{dr}{\sqrt{b^2+2mEr^4/L^2}}$.

(δ) Στην ειδική περίπτωση όπου αρχικά ισχύουν $r=b$, $\phi=0$, $v_r=v_\phi=L/mb$, δείξτε ότι η τροχιά του σώματος είναι η σπειροειδής $r=b(1+\phi)$.

(ε) Στην ειδική περίπτωση όπου αρχικά ισχύουν $r=b$, $\phi=0$, $v_r=0$, $v_\phi=L/mb$, βρείτε την γωνία ϕ που διαγράφει το σώμα μέχρι να φτάσει στο $r=0$.

Δίνεται το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}}=1.311.$

Θέμα 3^o:

Μία σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας είναι αρχικά ακίνητη, με σταθερή πυκνότητα ρ_0. Λόγω της ιδιοβαρύτητάς της, κάθε μάζα που αρχικά βρίσκεται σε ακτίνα r_0 θα φτάσει στο κέντρο σε χρόνο t_0.

(α) Βρείτε το χρόνο t_0 με διαστατική ανάλυση (εξαρτάται από τα ρ_0, r_0 και τη σταθερά G).

(β) Βρείτε ακριβώς το χρόνο t_0 ως ακολούθως:

(β_1) Αιτιολογήστε γιατί η μάζα που αρχικά βρίσκεται στην ακτίνα r_0 κινείται ακτινικά σύμφωνα με την εξίσωση $\ddot r=-k/r^2$ με $k=G\rho_0(4\pi r_0^3/3)$.

(β_2) Βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης και κατόπιν το χρόνο στον οποίο μηδενίζεται η ακτίνα.

Δίνεται $\displaystyle\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1/\xi-1}}=\frac{\pi}{2}.$

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1^o:

(α) $\vec v=\dot\varpi\hat\varpi+\varpi\dot\phi\hat\phi=\dot\phi(-\sin\phi\hat\varpi+\cos\phi\hat\phi)$, αφού $\varpi=\cos\phi$, $\dot\varpi=-\dot\phi\sin\phi$.

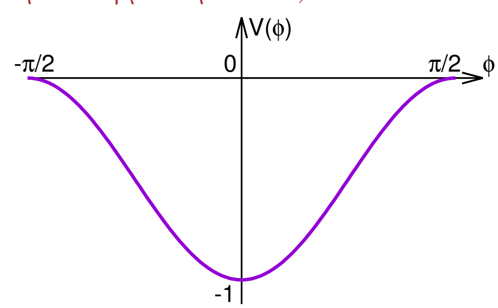
Άρα η κινητική ενέργεια είναι $\dfrac{mv^2}{2}=\dot\phi^2$.

Η δυναμική της φυγόκεντρου είναι $V=-\dfrac{m\omega^2r_\perp^2}{2}=-\cos^2\phi$, αφού η απόσταση του δαχτυλιδιού από τον άξονα περιστροφής είναι $r_\perp=\varpi$.

Το ολοκλήρωμα «ενέργειας» είναι $\dot\phi^2-\cos^2\phi=E$.

(β) Είναι $V(\phi)=-\cos^2\phi=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2\phi)$.

Το γράφημα φαίνεται παρακάτω (η συνάρτηση είναι άρτια, περιοδική με περίοδο π).



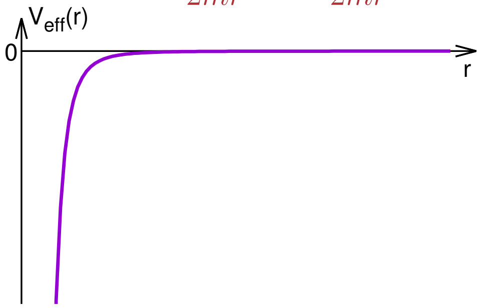
(γ_1) Από τις αρχικές συνθήκες $E=v_0^2-1\in[-1,0]$ αφού $v_0\in[0,1]$. Μέσω του γραφήματος και της ανισότητας $V(\phi)\le E$ που καθορίζει τα όρια της κίνησης συμπεραίνουμε ότι:

- Αν $E=-1\Leftrightarrow v_0=0$ το δαχτυλίδι μένει συνεχώς στο σημείο ισορροπίας $\phi=0$.
- Αν $-1<E<0\Leftrightarrow 0<v_0<1$ το δαχτυλίδι εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των γωνιών $\pm\phi_0$ όπου $V(\phi_0)=E\Leftrightarrow\phi_0=\arcsin v_0$.
- Αν $E=0\Leftrightarrow v_0=1$ το δαχτυλίδι πλησιάζει επ' άπειρον τη θέση όπου το δυναμικό γίνεται μέγιστο, δηλ. το σημείο $\phi=\pi/2$ (την αρχή των αξόνων O).

(γ_2) Αν $v_0\ll 1$ το δαχτυλίδι εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας $\phi=0$. Για $|\phi|\ll 1$ είναι $V=-1+\sin^2\phi\approx -1+\phi^2$ και η εξίσωση κίνησης είναι $\dot\phi^2-1+\phi^2=E$, ή παραγωγίζοντας $\ddot{\phi}+\phi=0$, δηλ. αρμονικός ταλαντωτής με μοναδιαία κυκλική συχνότητα. Η λύση είναι $\phi=C_1\sin t+C_2\cos t$ και λόγω των αρχικών συνθηκών $\phi_{t=0}=0$, $\dot{\phi}|_{t=0}=v_0$ τελικά προκύπτει $\phi=v_0\sin t$.

Θέμα 2^o:

(α) $V_{\rm eff}(r)=V(r)+\dfrac{L^2}{2mr^2}=-\dfrac{L^2b^2}{2mr^4}$.



(β) Από $\dfrac{m\dot{r}^2}{2}+V_{\rm eff}(r)=E$ η επιτρεπτή περιοχή της ακτινικής κίνησης βρίσκεται από $V_{\rm eff}(r)\le E$, με την ισότητα να αντιστοιχεί σε σημεία όπου η ακτινική ταχύτητα μηδενίζεται.

Για θετικές ενέργειες η ανισότητα ισχύει πάντα, άρα το σώμα απομακρύνεται από το κέντρο συνεχώς και φτάνει στο άπειρο (μη-περατωμένη κίνηση).

Για μηδενική ενέργεια επίσης η κίνηση δεν είναι περατωμένη (η διαφορά $E-V_{\rm eff}(r)$, άρα και η ακτινική ταχύτητα, μηδενίζεται σε άπειρη απόσταση).

Για αρνητικές ενέργειες είναι $V_{\rm eff}(r)\le E\Leftrightarrow r\le r_{\max}$ με $r_{\max}=\left(\dfrac{L^2b^2}{-2mE}\right)^{1/4}$ (στην ακτίνα αυτή το σώμα ανακλάται). Άρα η κίνηση είναι περατωμένη, γίνεται εντός του κύκλου ακτίνας $r=r_{\max}$.

(γ) Το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{m\dot{r}^2}{2}+V_{\rm eff}(r)=E$ με $\dot{r}=\dfrac{dr}{d\phi}\dot{\phi}$ και $\dot{\phi}=\dfrac{L}{mr^2}$ (ολοκλήρωμα στροφορμής) δίνει $\dfrac{dr}{d\phi}=\pm\sqrt{b^2+2mEr^4/L^2}$. Χωρίζοντας τις μεταβλητές παίρνουμε τη ζητούμενη.

Το ίδιο προκύπτει από $u''+u=-\dfrac{mF}{L^2u^2}$. Με $F=-\dfrac{dV}{dr}=-\dfrac{L^2}{mr^3}-\dfrac{2L^2b^2}{mr^5}=-\dfrac{L^2}{m}u^3-\dfrac{2L^2b^2}{m}u^5$ δίνει $u''=2b^2u^3$. Με $u''=\dfrac{du'}{du}u'=\dfrac{d(u'^2/2)}{du}$ δίνει $u'^2=b^2u^4+D$, δηλ. $\dfrac{d(1/r)}{d\phi}-\mp\sqrt{b^2/r^4+D}\Leftrightarrow\dfrac{dr}{d\phi}=\pm\sqrt{b^2+Dr^4}$. Η σύνδεση της σταθεράς D με την ενέργεια γίνεται μέσω της $E=\dfrac{m\dot{r}^2}{2}+\dfrac{L^2}{2mr^2}+V(r)$ με $\dot{r}=\dfrac{dr}{d\phi}\dot{\phi}=\dfrac{dr}{d\phi}\dfrac{L}{mr^2}$, η οποία δίνει $E=\dfrac{L^2D}{2m}$.

(δ) Για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες $E=\dfrac{m\dot{r}^2}{2}+V_{\rm eff}(r)=0$ οπότε $\phi(r)=\pm\displaystyle\int\frac{dr}{b}=\pm\frac{r}{b}+C$. Λόγω του ότι αρχικά τα $\dot{r}$ και $\dot{\phi}$ είναι ομόσημα επιλέγουμε το θετικό πρόσημο, ενώ η σταθερά ολοκλήρωσης προκύπτει $C=-1$ από τις αρχικές συνθήκες, οπότε καταλήγουμε στην ζητούμενη.

(ε) Για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες $E=\dfrac{m\dot{r}^2}{2}+V_{\rm eff}(r)=-\dfrac{L^2}{2mb^2}$ οπότε η συνολική γωνία είναι (επιλέγουμε το αρνητικό πρόσημο γιατί η γωνία αυξάνεται ενώ η απόσταση θα αρχίσει να ελαττώνεται αφού η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι $r\le b$, οπότε είναι $\dfrac{d\phi}{dr}<0$) $\phi(0)=-\displaystyle\int_b^0\frac{dr}{\sqrt{b^2+2mEr^4/L^2}}=\int_0^b\frac{dr/b}{\sqrt{1-r^4/b^4}}=\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}}=1.311$ rad.

Θέμα 3^o:

(α) $t_0\propto\rho_0^\alpha r_0^\beta G^\gamma$ με $[\rho_0]=[M][L]^{-3}$ και $[G]=[L]^3[M]^{-1}[T]^{-2}$ (από $GM/r=v^2$), οπότε $[T]=[L]^{-3\alpha+\beta+3\gamma}[M]^{\alpha-\gamma}[T]^{-2\gamma}$ από την οποία προκύπτουν $\alpha=-1/2$, $\beta=0$, $\gamma=-1/2$. Άρα $t_0\propto 1/\sqrt{G\rho_0}$. Προέκυψε ανεξάρτητος της αρχικής ακτίνας, δηλ. όλη η κατανομή θα φτάσει ταυτόχρονα στο κέντρο!

(β_1) Η επιτάχυνση της βαρύτητας σε ακτίνα r είναι $\vec{g}=-\dfrac{GM_{\varepsilon\gamma\kappa}}{r^2}\hat{r}$, όπου $M_{\varepsilon\gamma\kappa}$ είναι η μάζα εντός της σφαίρας ακτίνας r. Για την μάζα που αρχικά βρίσκεται σε ακτίνα r_0 η μάζα αυτή είναι $M_{\varepsilon\gamma\kappa}=\iiint\rho\,d\tau=\rho_0(4\pi r_0^3/3)$ και παραμένει σταθερή καθώς όλες οι μάζες κινούνται προς το κέντρο (δηλ. σε μεταγενέστερες στιγμές που η μάζα θα βρίσκεται σε ακτίνα r πάλι η μάζα εντός της σφαίρας ακτίνας r θα είναι $\rho_0(4\pi r_0^3/3)$, όση ήταν αρχικά εντός της σφαίρας ακτίνας r_0). Άρα $\ddot{\vec{r}}=\vec{g}=-\dfrac{G\rho_0(4\pi r_0^3/3)}{r^2}\hat{r}$ και αφού για ακτινική κίνηση $\ddot{\vec{r}}=\ddot{r}\hat{r}$ προκύπτει η ζητούμενη.

(β_2) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{\dot{r}^2}{2}-\dfrac{k}{r}=$ σταθερό $=-\dfrac{k}{r_0}$ από αρχικές συνθήκες, άρα η ταχύτητα είναι $\dot{r}=-\sqrt{2k(1/r-1/r_0)}$ (επιλέγουμε την αρνητική λύση). Χωρίζοντας τις μεταβλητές και ολοκληρώνοντας $t_0=\displaystyle\int_0^{t_0}dt=-\int_{r_0}^0\frac{dr}{\sqrt{2k(1/r-1/r_0)}}$. Θέτοντας $r=r_0\xi$ βρίσκουμε $t_0=\sqrt{\dfrac{r_0^3}{2k}}\displaystyle\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1/\xi-1}}=\sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}$.