Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξέταση στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 8 Φεβρουαρίου 2021
(Εξ αποστάσεως μέσω των «Ασκήσεων» της η-Τάξης)
Διάρκεια εξέτασης 90 λεπτά, Καλή επιτυχία

Απαντήστε τα ερωτήματα για τα οποία είστε σίγουροι και υποβάλετε τις απαντήσεις πριν τη λήξη (έχετε μία προσπάθεια υποβολής). Προτείνεται να ξεκινήσετε με τα πρώτα 7 ερωτήματα και κατόπιν να αφιερώσετε τον υπόλοιπο χρόνο στο ερώτημα 8. Προσέχετε το είδος κάθε ερώτησης.

1η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 1η παραλλαγή:
Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται σε τροχιά $\vec{r} = \dfrac{1}{1+2\cos\phi}\hat{\varpi}$ (σε πολικές συντεταγμένες ϖ, ϕ) με ταχύτητα $\vec{v} = 4\sin\phi\,\hat{\varpi} + 2(1+2\cos\phi)\hat{\phi}$. Ποια η δύναμη $\vec{F}$ που του ασκείται; Ποια η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς $\mathcal{R}$ σε σημεία όπου η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα;

Ίσως σας χρειαστεί η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$.

Απάντηση: $\vec{F} = -\dfrac{4}{\varpi^2}\hat{\varpi}$, $\mathcal{R} = 1$

Λύση: Για να καλύψουμε και τις δύο παραλλαγές τα δεδομένα αντιστοιχούν σε $\varpi = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\phi}$, $v_\phi = \dfrac{L/m}{p}(1+\varepsilon\cos\phi) = \dfrac{L/m}{\varpi}$ και $v_\varpi = \dfrac{\varepsilon L/m}{p}\sin\phi$ (εδώ $m=1$, $p=1$, $\varepsilon=2$ και $L=2$).
Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει τη διατήρηση της στροφορμής άρα η δύναμη είναι κεντρική. Η πρώτη εξίσωση γνωρίζουμε ότι αντιστοιχεί σε κωνική τομή με αρχή συντεταγμένων σε εστία, επομένως η κεντρική δύναμη είναι της μορφής $|\vec{F}| \propto 1/\varpi^2$.
Αφού η δύναμη – και η επιτάχυνση – είναι ακτινική, είναι κάθετη στην ταχύτητα σε σημεία όπου η ταχύτητα είναι μόνο αζιμουθιακή. Λόγω της καθετότητας $\vec{a} \perp \vec{v}$ στα σημεία αυτά η επιτάχυνση είναι μόνο κεντρομόλος (η επιτρόχια είναι μηδενική). Η σχέση $|\vec{a}_\kappa| = \dfrac{|\vec{v}|^2}{\mathcal{R}}$ με $|\vec{a}_\kappa| = |\vec{a}| = \dfrac{|\vec{F}|}{m}$ και $|\vec{v}| = |v_\phi| = \left|\dfrac{L/m}{\varpi}\right|$ δίνει στα σημεία αυτά $|\vec{F}|\varpi^2\mathcal{R} = L^2/m$ (εδώ $|\vec{F}|\varpi^2\mathcal{R} = 4$). Αυτό αρκούσε για να επιλεγεί απάντηση, γιατί ίσχυε μόνο σε μία από τις πιθανές απαντήσεις με δυνάμεις της μορφής $|\vec{F}| \propto 1/\varpi^2$.
Η δύναμη θα μπορούσε βέβαια να βρεθεί άμεσα, είτε με χρήση της $\vec{F} = m\vec{a} = m(\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(m\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$, αντικαθιστώντας $\ddot{\varpi} = \dot{v}_\varpi = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\varepsilon L/m}{p}\sin\phi\right) = \dfrac{\varepsilon L/m}{p}\dot{\phi}\cos\phi$ και $\dot{\phi} = \dfrac{v_\phi}{\varpi}$ με $v_\phi = \dfrac{L/m}{\varpi}$, είτε με χρήση της $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ με $u = \dfrac{1}{\varpi} = \dfrac{1+\varepsilon\cos\phi}{p}$. Προκύπτει $\vec{F} = -\dfrac{L^2}{mp\varpi^2}$ και $|\vec{F}|\varpi^2\mathcal{R} = L^2/m \Leftrightarrow \mathcal{R} = p$.

1η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 2η παραλλαγή:
Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται σε τροχιά $\vec{r} = \dfrac{1}{1+2\cos\phi}\hat{\varpi}$ (σε πολικές συντεταγμένες ϖ, ϕ) με ταχύτητα $\vec{v} = 2\sin\phi\,\hat{\varpi} + (1+2\cos\phi)\hat{\phi}$. Ποια η δύναμη $\vec{F}$ που του ασκείται; Ποια η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς $\mathcal{R}$ σε σημεία όπου η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα;

Ίσως σας χρειαστεί η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{d(\varpi^2\dot{\phi})}{dt}\hat{\phi}$.

Απάντηση: $\vec{F} = -\dfrac{1}{\varpi^2}\hat{\varpi}$, $\mathcal{R} = 1$

Λύση: Όπως πριν, αλλά με $m=1$, $p=1$, $\varepsilon=2$ και $L=1$ (ισχύει η λύση με $|\vec{F}| \propto 1/\varpi^2$ και $|\vec{F}|\varpi^2\mathcal{R} = 1$).

2η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 1η παραλλαγή:
Από ίδιο ύψος πάνω από το έδαφος αφήνουμε ταυτόχρονα δύο σώματα. Το ένα κινείται υπό την επίδραση μόνο του βάρους του. Στο δεύτερο ασκείται το βάρος mg και μικρή αντίσταση αέρα mkv^2, όπου m η μάζα του και k θετική σταθερά. Ποια η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σωμάτων μετά από χρόνο t;
Στο όριο της μικρής αντίστασης η απόσταση είναι ανάλογη της «μικρής» σταθεράς k.

Απάντηση: $kg^2t^4/12$

Λύση: Α΄τρόπος (διαταρακτικά): Για το δεύτερο σώμα, σε άξονα x με φορά προς τα κάτω και αρχή $x=0$ στο οριζόντιο επίπεδο αφετηρίας των σωμάτων, είναι $\ddot{x}=g-k\dot{x}^2$. Η μηδενικής τάξης λύση, για μηδενικό δηλ. k, η οποία είναι και η θέση του πρώτου σώματος μετά χρόνο t, είναι $x^{(0)}=gt^2/2$. (Οι σταθερές ολοκλήρωσης επιλέχθηκαν ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.) Προσθέτοντας διαταραχή, δηλ. θέτοντας $x=x^{(0)}+x^{(1)}$ στην εξίσωση κίνησης και κρατώντας μέχρι πρώτης τάξης όρους έχουμε $\ddot{x}^{(0)}+\ddot{x}^{(1)}=g-k[\dot{x}^{(0)}]^2 \Leftrightarrow \ddot{x}^{(1)}=-kg^2t^2 \Leftrightarrow \dot{x}^{(1)}=-kg^2t^3/3 \Leftrightarrow x^{(1)}=-kg^2t^4/12$. (Οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι μηδενικές ώστε οι διαταραχές να μηδενίζονται για $t=0$.)
Άρα για το δεύτερο σώμα $x=gt^2/2-kg^2t^4/12$ και η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σωμάτων μετά από χρόνο t είναι $kg^2t^4/12$, με το πρώτο να βρίσκεται πιο κάτω.

Β΄ τρόπος: (Με ακριβή επίλυση και κατόπιν αναπτύγματος της λύσης κατά Taylor): Η εξίσωση κίνησης $m\dot{v}=mg-mkv^2$ είναι χωριζομένων μεταβλητών και δίνει $\displaystyle\int_0^v \frac{dv}{g-kv^2}=\int_0^t dt \Leftrightarrow \int_0^v \frac{2\,dv/U}{1-(v/U)^2}=\int_0^t \frac{2g}{U}dt$ όπου $U=\sqrt{\dfrac{g}{k}}$. Είναι $\displaystyle\int_0^\xi \frac{2\,d\xi}{1-\xi^2}=\int_0^\xi\left(\frac{1}{1+\xi}+\frac{1}{1-\xi}\right)d\xi=\ln\left|\frac{1+\xi}{1-\xi}\right|$ άρα $\ln\left|\dfrac{1+v/U}{1-v/U}\right|=\dfrac{2gt}{U}$.
Η ποσότητα μέσα στο απόλυτο είναι αρχικά θετική και παραμένει θετική όσο η ταχύτητα v είναι μικρότερη της U. Όταν η v πλησιάζει την U ο λογάριθμος απειρίζεται, άρα και το δεξιό μέλος της ισότητας, δηλ. ο χρόνος. Επομένως ισχύει πάντα $v<U$ και η λύση είναι $\ln\dfrac{1+v/U}{1-v/U}=\dfrac{2gt}{U} \Leftrightarrow \dfrac{1+v/U}{1-v/U}=e^{2gt/U} \Leftrightarrow v=U\tanh\left(\dfrac{gt}{U}\right)$. Ολοκληρώνοντας ξανά βρίσκουμε $\displaystyle x=\int_0^t v\,dt=\frac{U^2}{g}\int_0^t \frac{\sinh(gt/U)\,dt\,g/U}{\cosh(gt/U)}=\frac{U^2}{g}\ln[\cosh(gt/U)]=\frac{1}{k}\ln\left[\cosh\left(t\sqrt{kg}\right)\right]$. Επομένως η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι $\dfrac{gt^2}{2}-\dfrac{1}{k}\ln\left[\cosh\left(t\sqrt{kg}\right)\right]$ με το πρώτο πιο κάτω.
Για «μικρό» k, το αδιάστατο όρισμα της cosh είναι μικρό και μπορούμε να αναπτύξουμε την συνάρτηση αυτή κατά Taylor. («Μικρό» k σημαίνει λοιπόν $t\sqrt{kg}\ll 1 \Leftrightarrow k \ll \dfrac{1}{gt^2}$, ή ισοδύναμα $gt\ll U$.)
Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(\xi)=\ln(\cosh\xi)$ γύρω από το μηδέν είναι $f(\xi)\approx f(0)+f'(0)\xi+\dfrac{1}{2}f''(0)\xi^2+\dfrac{1}{3!}f'''(0)\xi^3+\dfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)\xi^4$ και αφού $f'(\xi)=\tanh\xi$, $f''(\xi)=\dfrac{1}{\cosh^2\xi}$, $f'''(\xi)=-\dfrac{2\sinh\xi}{\cosh^3\xi}$, $f^{(4)}(\xi)=-\dfrac{2}{\cosh^2\xi}+\dfrac{6\sinh^2\xi}{\cosh^4\xi}$ προκύπτει $\ln(\cosh\xi)\approx\dfrac{\xi^2}{2}-\dfrac{\xi^4}{12}$ (όπως θα φανεί αμέσως παρακάτω, για να βρούμε την πρώτη διόρθωση της θέσης του δεύτερου σώματος σε σχέση με την τιμή $gt^2/2$ πρέπει να κρατήσουμε δύο μη-μηδενικούς όρους στο ανάπτυγμα, δηλ. να κρατήσουμε μέχρι 4ης τάξης όρους, μιας και για την συγκεκριμένη συνάρτηση ισχύει $f(0)=0$, $f'(0)=0$ και $f'''(0)=0$).
Επομένως για «μικρό» k ισχύει για το δεύτερο σώμα $x=\dfrac{1}{k}\left[\dfrac{\xi^2}{2}-\dfrac{\xi^4}{12}\right]_{\xi=t\sqrt{kg}}=\dfrac{gt^2}{2}-\dfrac{kg^2t^4}{12}$, δηλ. η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι $kg^2t^4/12$ με το πρώτο πιο κάτω.

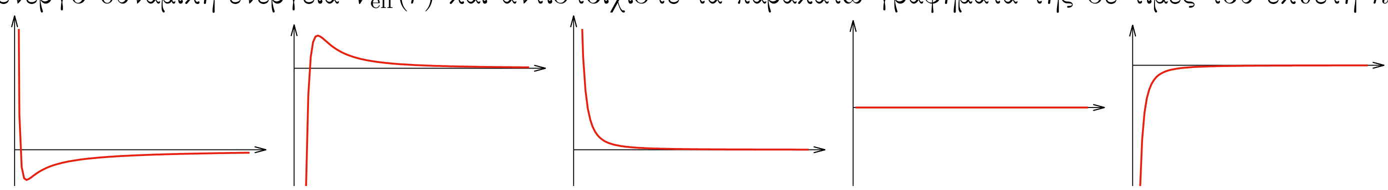
2η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 2η παραλλαγή:
Από ίδιο ύψος πάνω από το έδαφος αφήνουμε ταυτόχρονα δύο σώματα. Το ένα κινείται υπό την επίδραση μόνο του βάρους του. Στο δεύτερο ασκείται το βάρος mg και μικρή αντίσταση αέρα $\frac{1}{2}mkv^2$, όπου m η μάζα του και k θετική σταθερά. Ποια η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των σωμάτων μετά από χρόνο t;
Στο όριο της μικρής αντίστασης η απόσταση είναι ανάλογη της «μικρής» σταθεράς k.
Απάντηση: $kg^2t^4/24$
Λύση: Όπως στην 1η παραλλαγή, απλά αντικαθιστούμε παντού το k με $k/2$.

3η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 1η παραλλαγή:
Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται μονοδιάστατα στο πεδίο $F(x)=-4x^3+2x$. Αν υπάρχουν σημεία ευσταθούς ισορροπίας βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από αυτά.
Απάντηση: $T=\pi$
Λύση: Για να καλύψουμε και τις δύο παραλλαγές, έστω $F(x)=C(-2x^3+x)$, με $C>0$ (εδώ είναι $C=2$).

Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ έχει παραγώγους $V'(x) = -F(x) = C(2x^3 - x)$ και $V''(x) = C(6x^2 - 1)$. Σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα της $V(x)$, δηλ. οι μηδενισμοί της δύναμης $x_0 = 0, \pm 1/\sqrt{2}$.
Στο $x_0 = 0$ είναι $V''(0) < 0$ (μέγιστο), άρα το σημείο είναι ασταθές.
Στα $x_0 = \pm 1/\sqrt{2}$ είναι $V''(\pm 1/\sqrt{2}) = 2C > 0$ (ελάχιστο), άρα τα σημεία είναι ευσταθή.
Με $x = x_0 + q$ είναι $V(x) \approx V(x_0) + \dfrac{1}{2}V''(x_0)q^2$, οπότε $\dfrac{m\dot{q}^2}{2} + \dfrac{1}{2}V''(x_0)q^2 =$ σταθερά και παραγωγίζοντας έχουμε $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ με $\omega = \sqrt{V''(x_0)/m} = \sqrt{2C}$. Η περίοδος $T = 2\pi/\omega$ για $C = 2$ προκύπτει $T = \pi$.
(Τα ίδια προκύπτουν μελετώντας την συνάρτηση $F(x)$, δηλ. βρίσκοντας τα σημεία μηδενισμού της, το πρόσημο εκατέρωθεν αυτών – στα ευσταθή πρέπει να είναι δύναμη επαναφοράς – και τέλος αναπτύσσοντας κατά Taylor $F(x) \approx F'(x_0)q$ όπου $q = x - x_0$, οπότε $m\ddot{q} - F'(x_0)q = 0$, δηλ. $\omega = \sqrt{-F'(x_0)/m}$.)

3η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1.5 μονάδες), 2η παραλλαγή:
Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται μονοδιάστατα στο πεδίο $F(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x$. Αν υπάρχουν σημεία ευσταθούς ισορροπίας βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από αυτά.
Απάντηση: $T = 2\pi$
Λύση: Όπως στην 1η παραλλαγή, απλά με $C = 1/2$, οπότε $\omega = \sqrt{2C} = 1$ και η περίοδος $T = 2\pi/\omega = 2\pi$.

4η ερώτηση (ταίριασμα για 1 μονάδα):
Σώμα μάζας m με στροφορμή L κινείται σε άγνωστο ελκτικό κεντρικό πεδίο το οποίο μοντελοποιούμε μέσω μιας δυναμικής ενέργειας $V = -k/r^n$, όπου k και n άγνωστες θετικές σταθερές. Βρείτε την ενεργό δυναμική ενέργεια $V_{\text{eff}}(r)$ και αντιστοιχίστε τα παρακάτω γραφήματά της σε τιμές του εκθέτη n.



Απάντηση: $n < 2$ για το πρώτο, $n > 2$ για το δεύτερο, $n = 2$ για τα υπόλοιπα
Λύση: $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{k}{r^n}$, $V'_{\text{eff}}(r) = -\dfrac{L^2}{mr^3} + \dfrac{nk}{r^{n+1}}$, $V''_{\text{eff}}(r) = \dfrac{3L^2}{mr^4} - \dfrac{n(n+1)k}{r^{n+2}}$.
Ο μηδενισμός της V'_{eff} δίνει ακρότατο στην ακτίνα r_o για την οποία $r_o^{n-2} = \dfrac{nmk}{L^2}$. Στην ακτίνα αυτή $V''_{\text{eff}}(r_o) = \dfrac{3L^2}{mr_o^4} - \dfrac{n(n+1)k}{r_o^{n+2}} = \dfrac{L^2(2-n)}{mr_o^4}$.
Το πρώτο γράφημα έχει ελάχιστο, άρα $V''_{\text{eff}}(r_o) > 0 \Leftrightarrow n < 2$.
Το δεύτερο γράφημα έχει μέγιστο, άρα $V''_{\text{eff}}(r_o) < 0 \Leftrightarrow n > 2$.
Αν $n = 2$ τότε $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2 - 2mk}{2mr^2}$ και ανάλογα με το πρόσημο του αριθμητή έχουμε το τρίτο γράφημα αν $L^2 > 2mk$, το τέταρτο αν $L^2 = 2mk$ και το πέμπτο αν $L^2 < 2mk$.
Τα ίδια προκύπτουν αν σκεφτούμε ξεχωριστά τους δύο όρους της $V_{\text{eff}}(r)$ και ποιος κυριαρχεί σε μικρά και μεγάλα r. Στο πρώτο γράφημα κυριαρχεί ο θετικός όρος για $r \to 0$ και ο αρνητικός για $r \to \infty$, άρα $n < 2$. Στο δεύτερο γράφημα κυριαρχεί ο αρνητικός όρος για $r \to 0$ και ο θετικός για $r \to \infty$, άρα $n > 2$. Τα τρία επόμενα αντιστοιχούν σε $n = 2$ οπότε η συνάρτηση δεν αλλάζει πρόσημο. Είναι θετική αν $L^2 > 2mk$ (τρίτο γράφημα), μηδέν αν $L^2 = 2mk$ (τέταρτο γράφημα), αρνητική αν $L^2 < 2mk$ (πέμπτο γράφημα).

5η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 0.5 μονάδες):
Έστω το άγνωστο ελκτικό κεντρικό πεδίο $V = -k/r^n$ της προηγούμενης ερώτησης. Για να καταλάβουμε τα χαρακτηριστικά του πεδίου πετάμε από μεγάλες αποστάσεις σώματα ίδιας μάζας m με ίδια στροφορμή L, αλλά διαφορετικές ενέργειες E. Παρατηρούμε ότι για τιμές της ενέργειας μεγαλύτερες μιας οριακής $E_{\text{ορ}}$ το σώμα πέφτει στο κέντρο ενώ για τιμές μικρότερες της $E_{\text{ορ}}$ φτάνει σε μια ελάχιστη απόσταση από το κέντρο και απομακρύνεται ξανά από αυτό. Τι συμπέρασμα προκύπτει για το γράφημα του $V_{\text{eff}}(r)$;
(Οι ενέργειες είναι θετικές.)
Απάντηση: Σωστό είναι το 2ο γράφημα της προηγούμενης ερώτησης.
Λύση: Αφού δεν αλλάζουμε την L, η $V_{\text{eff}}(r)$ μένει ίδια στις διάφορες βολές. Σε κάθε περίπτωση τα όρια

της τροχιάς βρίσκονται από την γραφική λύση της ανισότητας $V_{\text{eff}}(r) \le E$.
Αφού σε μεγάλες ενέργειες το σώμα πέφτει στο κέντρο, οπότε δεν έχει λύση η $V_{\text{eff}}(r) = E$, απορρίπτονται το πρώτο και το τρίτο γράφημα.
Αφού σε μικρές (αλλά θετικές) ενέργειες η τροχιά έχει ελάχιστη ακτίνα, δηλ. έχει λύση η $V_{\text{eff}}(r) = E$, από τα υπόλοιπα γραφήματα απορρίπτονται το τέταρτο και το πέμπτο.

6η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1 μονάδα):
Συνεχίζοντας την προηγούμενη ερώτηση, από την οριακή τιμή $E_{\text{ορ}}$ και την ελάχιστη απόσταση r_o που φτάνει το σώμα αν η ενέργεια είναι απειροστά μικρότερη της $E_{\text{ορ}}$ βρείτε τα n και k.
Απάντηση: $n = \dfrac{2}{1 - 2mr_o^2 E_{\text{ορ}}/L^2}$ και $k = \dfrac{L^2}{nm} r_o^{n-2}$
Λύση: Για $n > 2$ η $V_{\text{eff}}(r)$ έχει μέγιστο στην ακτίνα r_o όπου $r_o^{n-2} = \dfrac{nmk}{L^2}$, ίσο με $V_{\text{eff}}(r_o) = \dfrac{(n-2)L^2}{2nmr_o^2}$.
Η οριακή τιμή της ενέργειας ισούται με το μέγιστο αυτό και η αντίστοιχη ελάχιστη απόσταση είναι η r_o. Οι σχέσεις $E_{\text{ορ}} = \dfrac{(n-2)L^2}{2nmr_o^2}$, $r_o^{n-2} = \dfrac{knm}{L^2}$ δίνουν $n = \dfrac{2}{1 - 2mr_o^2 E_{\text{ορ}}/L^2}$ και $k = \dfrac{L^2}{nm} r_o^{n-2}$.

7η ερώτηση (πολλαπλής επιλογής με μοναδική απάντηση για 1 μονάδα):
Έστω σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας M με κέντρο Ο και ακτίνα R. Αν από σημείο της επιφάνειάς της αφαιρέσουμε μικρή μάζα m και την τοποθετήσουμε στην αντιδιαμετρική θέση, ποια η ένταση του πεδίου βαρύτητας στο Ο;
Υπόδειξη: Η αφαίρεση μάζας μπορεί να θεωρηθεί προσθήκη «αρνητικής» μάζας.
Απάντηση: $g = 2Gm/R^2$ με φορά προς τη νέα θέση της m
Λύση: Η κατανομή είναι ισοδύναμη με την επαλληλία (α) της πλήρους σφαιρικά συμμετρικής κατανομής, η οποία δημιουργεί μηδενικό πεδίο στο κέντρο Ο, (β) της αρνητικής μάζας $-m$ στο σημείο της οπής, η οποία δημιουργεί απωστικό πεδίο στο Ο μέτρου Gm/R^2 και φοράς από την οπή προς το Ο, και (γ) της μάζας m που τοποθετήσαμε αντιδιαμετρικά της οπής, η οποία δημιουργεί ελκτικό πεδίο στο Ο μέτρου Gm/R^2 και φοράς από το Ο προς την m. Η επαλληλία τους δίνει ένταση μέτρου $g = 2Gm/R^2$ με φορά προς τη νέα θέση της m.

8η ερώτηση (ταίριασμα για 2 μονάδες):
Διερευνήστε αν η εξίσωση $\Gamma \dot{x}^2 + \dfrac{x^4 - x^2}{2} =$ σταθερά ισχύει σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις, επιλέγοντας το σωστό Γ. (Για όσες περιπτώσεις θεωρείτε ότι η εξίσωση δεν ισχύει μην επιλέξετε Γ.)
(α) Μονοδιάστατη κίνηση σώματος μοναδιαίας μάζας σε πεδίο δύναμης $\vec{F} = (x - 2x^3)\hat{x}$.
(β) Μη-περιστρεφόμενο διατομικό μόριο του οποίου τα άτομα έχουν μάζες $m_1 = m_2 = 1$, απέχουν απόσταση $|x|$ και η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασής τους είναι $\dfrac{x^4 - x^2}{2}$.
(γ) Κίνηση δαχτυλιδιού μοναδιαίας μάζας σε λείο σύρμα $y = x^4/2$ που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y με μοναδιαία γωνιακή ταχύτητα, μέσα σε πεδίο βαρύτητας $\vec{g} = -\hat{y}$.
(δ) Κίνηση σώματος μοναδιαίας μάζας και μοναδιαίου φορτίου σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = 2x\hat{z}$ για το οποίο αρχικά ισχύει $x|_{t=0} = 0$ και $v_y|_{t=0} = 1/2$.
(ε) Ακτινική κίνηση σώματος στο διάστημα $1/\sqrt{2} \le x \le 1$ του άξονα x υπό την επίδραση βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας με πυκνότητα $\rho(r) = \dfrac{10r^2 - 3}{4\pi G}$ εντός της περιοχής $1/\sqrt{2} \le r \le 1$ (ο υπόλοιπος χώρος είναι κενός).
(στ) Ιδανικό επίπεδο εκκρεμές ακτίνας $R = 1$, αν x είναι η ταχύτητα του σώματος και η ενέργεια έχει κατάλληλη τιμή.
Απάντηση: Η εξίσωση ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις με $\Gamma = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1+4x^6}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2$ στα ερωτήματα (α), (β), (γ), (δ), (ε), (στ), αντίστοιχα.
Λύση: (α) Η δυναμική ενέργεια είναι $V(x) = -\displaystyle\int F(x)\,dx = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2} +$ σταθερά, οπότε το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι η έκφραση που δίνεται με $\Gamma = 1/2$.

(β) Η εξίσωση κίνησης που καθορίζει την σχετική θέση του m_2 ως προς το m_1 είναι $\mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V$ όπου $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = \dfrac{1}{2}$ η ανηγμένη μάζα. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + V =$ σταθερό. Χωρίς περιστροφή η σχετική κίνηση γίνεται σε άξονα x, οπότε $\vec{r} = x\hat{x}$ και το ολοκλήρωμα είναι $\dfrac{1}{4}\dot{x}^2 + \dfrac{x^4-x^2}{2} =$ σταθερά, δηλ. η δοσμένη έκφραση με $\Gamma = \dfrac{1}{4}$.
Αλλιώς: Στο αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας τα άτομα έχουν θέσεις $\pm x/2$ και ταχύτητες $\pm\dot{x}/2$. Η ολική ενέργεια είναι $\dfrac{1}{2}m_1(\dot{x}/2)^2 + \dfrac{1}{2}m_2(\dot{x}/2)^2 + V = \dfrac{1}{4}\dot{x}^2 + \dfrac{x^4-x^2}{2}$ και παραμένει σταθερή.
(γ) Για την κίνηση αυτή στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» στο οποίο πρέπει να συμπεριλάβουμε την δυναμική λόγω βάρους $mgy = x^4/2$ και λόγω φυγόκεντρου $-m\omega^2 r_\perp^2/2 = -x^2/2$ (διότι η γωνιακή ταχύτητα είναι μονάδα και η προβολή του διανύσματος θέσης κάθετα στον άξονα περιστροφής είναι $\vec{r}_\perp = x\hat{x}$). Το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών είναι ίσο με $\dfrac{x^4-x^2}{2}$.
Η ταχύτητα του δαχτυλιδιού στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς είναι $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$ με $\dot{y} = \dfrac{dy}{dx}\dot{x} = 2x^3\dot{x}$ και άρα η κινητική ενέργεια είναι $\dfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \dfrac{1}{2}\dot{x}^2(1+4x^6)$. Το ολοκλήρωμα για αυτή την κίνηση είναι λοιπόν $\dfrac{1}{2}\dot{x}^2(1+4x^6) + \dfrac{x^4-x^2}{2} =$ σταθερά, δηλ. η δοσμένη έκφραση με $\Gamma = \dfrac{1+4x^6}{2}$.
(δ) Η εξίσωση κίνησης $\vec{a} = \vec{v}\times\vec{B}$, θέτοντας $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$, $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$ και $\vec{B} = 2x\hat{z}$ έχει συνιστώσες $\ddot{x} = 2x\dot{y}$, $\ddot{y} = -2x\dot{x}$, $\ddot{z} = 0$. Η δεύτερη δίνει ολοκλήρωμα $\dot{y} = -x^2+$ σταθερά και λόγω των αρχικών συνθηκών που δίνονται $\dot{y} = -x^2 + 1/2$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη, καταλήγουμε σε ίδια εξίσωση με την περίπτωση (α) $\ddot{x} = x - 2x^3$, η οποία δίνει ίδιο ολοκλήρωμα. (Το ολοκλήρωμα αυτό προκύπτει και από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας που ισχύει για κίνηση μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Αυτή γράφεται $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{\dot{y}^2}{2} + \dfrac{\dot{z}^2}{2} =$ σταθερά. Στην $\hat{z}$ κατεύθυνση δεν υπάρχει δύναμη, η ταχύτητα είναι σταθερή και άρα ο τελευταίος όρος είναι από μόνος του σταθερός και απορροφάται στο δεξιό μέλος. Ο δεύτερος όρος, λόγω της $\dot{y} = -x^2 + 1/2$, αντιστοιχεί στην «δυναμική ενέργεια» $\dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{x^4-x^2}{2} + \dfrac{1}{8}$. Άρα το ολοκλήρωμα οδηγεί στην $\dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{x^4-x^2}{2} =$ σταθερά, δηλ. την δοσμένη έκφραση με $\Gamma = \dfrac{1}{2}$.)
(ε) Η κατανομή μάζας δημιουργεί πεδίο $\vec{g} = g(r)\hat{r}$. Ο νόμος Gauss δίνει $g(r) = -\dfrac{GM(r)}{r^2}$ όπου $M(r)$ η μάζα που περικλείει η σφαίρα ακτίνας r. Εντός της περιοχής $1/\sqrt{2} \le r \le 1$, όπου $M(r) = \displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^{r} \rho(r)4\pi r^2\,dr$, προκύπτει $g(r) = -\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^{r}(10r^2-3)r^2\,dr = r - 2r^3$.
(Το ίδιο προκύπτει ολοκληρώνοντας τον διαφορικό νόμο Gauss εντός της περιοχής $\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G\rho \Leftrightarrow \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d(r^2 g)}{dr} = 3 - 10r^2 \Leftrightarrow g = \dfrac{r^3 - 2r^5 + C}{r^2}$ και βρίσκοντας την σταθερά C απαιτώντας η g να μηδενίζεται στην εσωτερική ακτίνα μέσα από την οποία δεν υπάρχει μάζα.)
Η εξίσωση κίνησης της μάζας είναι $m\ddot{x} = mg \Leftrightarrow \ddot{x} = x - 2x^3$ (πάνω στον άξονα x είναι $r = x$), δηλ. ίδια εξίσωση με την περίπτωση (α), η οποία δίνει ίδιο ολοκλήρωμα.
(στ) Για ιδανικό επίπεδο εκκρεμές ισχύει $\dfrac{mv^2}{2} - mgR\cos\phi = E$ και $m\dot{v} = -mg\sin\phi$ (όπου ϕ η γωνία $(\widehat{\vec{r},\vec{g}})$ και $v = R\dot{\phi}$). Με $R = 1$ γράφονται $v^2 = 2g\cos\phi + \dfrac{2E}{m}$ και $\dot{v} = -g\sin\phi$. Η έκφραση $\Gamma\dot{v}^2 + \dfrac{v^4-v^2}{2} = \Gamma g^2(1-\cos^2\phi) + 2g^2\cos^2\phi + \left(\dfrac{4E}{m} - 1\right)g\cos\phi + \dfrac{2E^2}{m^2} - \dfrac{E}{m}$ είναι πράγματι σταθερή αν $\Gamma = 2$ και $E = \dfrac{m}{4}$.
(Οι σχέσεις $E = m/4$, $R = 1$, με κατάλληλη επιλογή μονάδων μήκους και χρόνου, αντιστοιχούν σε κάθε τροχιά θετικής ενέργειας εκκρεμούς οποιασδήποτε ακτίνας.)