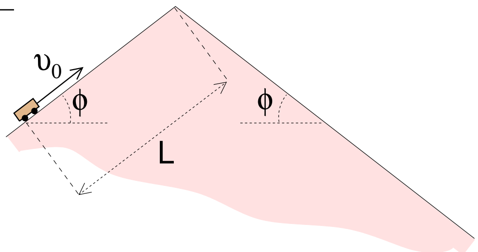
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 5 Οκτωβρίου 2020
Διάρκεια εξέτασης $1\frac{1}{2}$ ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: __________________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 16ης Δεκεμβρίου 2019: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο:



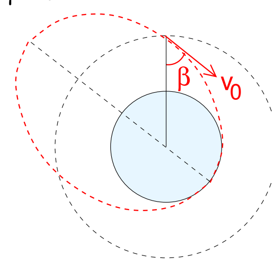
Στο όχημα του σχήματος ασκείται το βάρος $m\vec{g}$, η κάθετη αντίδραση και αντίσταση αντίρροπη της ταχύτητας με μέτρο $\lambda m v^2/2$ όπου λ σταθερά.
(α) Ποια είναι η ταχύτητα του οχήματος κατά το ανέβασμα συναρτήσει της απόστασης s που διανύει; Δεδομένα είναι τα g, ϕ, λ και η αρχική ταχύτητα υ_0.
(β) Ποια πρέπει να είναι η υ_0 ώστε να περάσει τον λόφο; Η κορυφή απέχει L από την αρχική θέση. Πως θα καταλήξει να κινείται στο κατέβασμα;
★ (γ) Ποια πρέπει να είναι η υ_0 ώστε το σώμα στο κατέβασμα να εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση;
(Στο ανώτερο σημείο η φορά ταχύτητας αλλάζει ακαριαία χωρίς να χαθεί η επαφή με τον δρόμο.)

Θέμα 2ο:

Έστω μια πλάγια βολή σε περιοχή του ισημερινού της Γης. Αρχικά το σώμα βρίσκεται στο έδαφος και έχει ταχύτητα με οριζόντια συνιστώσα προς βορρά και κατακόρυφη συνιστώσα υ_{0z}.
(α) Δείξτε ότι λόγω της επίδρασης της επιτάχυνσης Coriolis $-2\vec{\omega}\times\vec{v}$ το σημείο πτώσης του σώματος θα αποκλίνει κατά $\dfrac{4\omega \upsilon_{0z}^3}{3g^2}$ προς την δύση.
★ (β) Θα μπορούσατε να προβλέψετε με διαστατική ανάλυση την εξάρτηση του αποτελέσματος από την ταχύτητα υ_{0z} και την επιτάχυνση βαρύτητας g; Γιατί η απόκλιση δεν εξαρτάται από την αρχική οριζόντια ταχύτητα;

Θέμα 3ο:

Δορυφόρος κινείται γύρω από την Γη σε κυκλική τροχιά ακτίνας $2R$, όπου R η ακτίνα της Γης. Ξαφνικά η διεύθυνση κίνησής του στρέφεται προς τη Γη ώστε να σχηματίζει οξεία γωνία β με την ακτινική κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα, χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του.



(α) Ποιο το μέτρο της υ_0 για την κυκλική τροχιά;
(β) Ποια η στροφορμή και η ενέργεια της νέας τροχιάς μετά την αλλαγή κατεύθυνσης;
(γ) Για ποιες β ο δορυφόρος θα πέσει στην Γη;
★ (δ) Δείξτε ότι ο μεγάλος άξονας της νέας τροχιάς του δορυφόρου είναι παράλληλος με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ που έχει αμέσως μετά την αλλαγή κατεύθυνσης.

Δίνεται η σχέση $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ και η ταυτότητα $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$.

Θέμα 4ο:

Μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας έχει πυκνότητα $\rho(r) = \rho_0\, e^{-(r/r_0)^3}$ όπου r η απόσταση από το κέντρο της (ρ_0, r_0 είναι θετικές σταθερές).
(α) Ποια η μάζα της κατανομής από το κέντρο της ως την ακτίνα r; Ποια η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η κατανομή;
(β) Τι ταχύτητα πρέπει να έχει μια σημειακή μάζα στο κέντρο της κατανομής ώστε να διαφύγει από το πεδίο της; (Η κατανομή μένει συνεχώς ακίνητη.)

Δίνεται $\displaystyle\int_0^x x^2\, e^{-x^3} dx = \frac{1-e^{-x^3}}{3}$ και $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^3}}{x^2}\, dx = \Gamma(2/3) = 1.354.$

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

(α) Η συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα πάνω στην κίνηση είναι κατά το ανέβασμα $m\dot{v} = -mg\sin\phi - \lambda m v^2/2$. Θέτοντας $\dot{v} = \dfrac{ds}{dt}\dfrac{dv}{ds} = v\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{ds}$, όπου s το μήκος που διανύει το όχημα, βρίσκουμε $\dfrac{dv^2}{ds} + \lambda v^2 = -2g\sin\phi$, δηλ. γραμμική, μη-ομογενή διαφορική εξίσωση. Η λύση της ομογενούς είναι $Ce^{-\lambda s}$, ενώ μία μερική λύση (σταθερή) είναι $-\dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}$. Άρα η γενική λύση είναι $v^2 = Ce^{-\lambda s} - \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}$. Για $s = 0$ είναι $v = v_0$, οπότε $C = v_0^2 + \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}$, δηλ. σε κάθε θέση κατά το ανέβασμα $v = \sqrt{\left(v_0^2 + \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}\right)e^{-\lambda s} - \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}}$.

Αλλιώς: Χωρίζοντας τις μεταβλητές στην διαφορική εξίσωση $mv\,dv/ds = -mg\sin\phi - \lambda m v^2/2$ προκύπτει $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{g\sin\phi + \lambda v^2/2} = -\int_0^s ds$ με την ολοκλήρωση να δίνει $\left[\dfrac{1}{\lambda}\ln\left|g\sin\phi + \lambda v^2/2\right|\right]_{v_0}^{v} = -s \Leftrightarrow \ln\dfrac{g\sin\phi + \lambda v^2/2}{g\sin\phi + \lambda v_0^2/2} = -\lambda s$.

(β) Πρέπει να φτάσει στην ανώτερη θέση $s = L$ με θετική ταχύτητα, δηλ. πρέπει $\left(v_0^2 + \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}\right)e^{-\lambda L} - \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda} > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}\left(e^{\lambda L} - 1\right)}$. Αν γίνει αυτό, στο κατέβασμα δεν θα σταματήσει ποτέ, θα αποκτήσει οριακή ταχύτητα $mg\sin\phi = \lambda m v_{\text{οριακή}}^2/2 \Leftrightarrow v_{\text{οριακή}} = \sqrt{\dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}}$.

(γ) Πρέπει η ταχύτητα στην κορυφή να είναι μεγαλύτερη της οριακής, δηλ. πρέπει να ισχύει $\left(v_0^2 + \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}\right)e^{-\lambda L} - \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda} > \dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}$, ή ισοδύναμα $v_0 > \sqrt{\dfrac{2g\sin\phi}{\lambda}\left(2e^{\lambda L} - 1\right)}$.

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

(α) Σε σύστημα με αρχή το σημείο αφετηρίας του σώματος, x προς ανατολάς, y προς βορρά και z προς ναδίρ η γωνιακή ταχύτητα είναι $\vec{\omega} = \omega\hat{y}$, η επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = -g\hat{z}$ και οι αρχικές συνθήκες $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_{0y}$ και $\dot{z}_0 = v_{0z}$. Ο νόμος Νεύτωνα $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\vec{v} \Leftrightarrow \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} = -g\hat{z} - 2\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & \omega & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\ddot{x} = -2\omega\dot{z}\\ \ddot{y} = 0\\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\end{array}\right\}$ καταρχάς ολοκληρώνεται μία φορά και δίνει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες για να υπολογίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης) $\left\{\begin{array}{ll}\dot{x} = -2\omega z\,, & ①\\ \dot{y} = v_{0y}\,, & ②\\ \dot{z} = v_{0z} - gt + 2\omega x\,. & ③\end{array}\right\}$

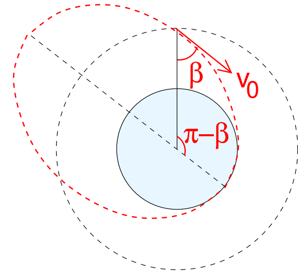
Η ② δείχνει ότι η οριζόντια κίνηση προς βορρά είναι ευθύγραμμη και ομαλή (δεν επηρεάζεται από την περιστροφή της Γης). Το σύστημα των ① και ③ μπορεί να λυθεί διαταρακτικά, διότι η επίδραση της περιστροφής είναι μικρή, δηλ. οι όροι που είναι ανάλογοι του ω είναι μικροί. Η ① δείχνει ότι η $x(t)$ είναι τάξης ω (χωρίς περιστροφή θα έδινε λύση $x = x_0 = 0$). Επομένως για να βρούμε την πρώτης τάξης διόρθωση λόγω της περιστροφής (δηλ. να κρατήσουμε όρους το πολύ ανάλογους του ω) πρέπει στο δεξιό μέλος της ① να αντικαταστήσουμε την μηδενικής τάξης λύση για την $z(t)$. Η τελευταία βρίσκεται από την ③ με $\omega = 0$. Ολοκληρώνοντας αυτή την εξίσωση και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε την μηδενικής τάξης λύση $z = v_{0z}t - \dfrac{gt^2}{2}$. Η αντικατάσταση στην ① δίνει $\dot{x} = -2\omega v_{0z}t + \omega g t^2$, η ολοκλήρωση της οποίας δίνει (χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες) $x = -\omega v_{0z}t^2 + \dfrac{\omega g t^3}{3}$. Το σώμα ξαναπέφτει στη Γη σε χρόνο τ στον οποίο $z = 0 \Leftrightarrow \tau = 2v_{0z}/g$ (πάλι μας ενδιαφέρει μόνο το μηδενικής τάξης αποτέλεσμα γιατί τυχόν διόρθωση του τ λόγω περιστροφής θα δώσει όρο $\propto \omega^2$ στην x). Επομένως η απόκλιση στην διεύθυνση ανατολή-δύση (σε πρώτη τάξη ως προς ω) είναι $x = -\omega v_{0z}\tau^2 + \dfrac{\omega g \tau^3}{3} = -\dfrac{4\omega v_{0z}^3}{3g^2}$. Το μείον σημαίνει ότι η απόκλιση είναι προς την δύση.

(β) Η απόκλιση είναι ανάλογη της ω και εξαρτάται από τα v_{0z} και g, δηλ. είναι $x \propto \omega v_{0z}^{\alpha} g^{\beta}$. Η γωνιακή ταχύτητα έχει μονάδες $1/[T]$, η ταχύτητα $[L]/[T]$ και η επιτάχυνση $[L]/[T]^2$. Επομένως η παραπάνω σχέση δίνει $1 = \alpha + \beta$ για τα μήκη και $0 = -1 - \alpha - 2\beta$ για τους χρόνους. Η λύση του συστήματος δίνει $\alpha = 3$, $\beta = -2$, δηλ. προκύπτει $x \propto \dfrac{\omega v_{0z}^3}{g^2}$.

Η κίνηση παράλληλα στην $\vec{\omega}$, δηλ. στην διεύθυνση βορρά-νότου για σημεία του ισημερινού, δεν συνεισφέρει στην Coriolis (διότι $-2\vec{\omega}\times\vec{v}_y = 0$). Για τον λόγο αυτό η αρχική οριζόντια ταχύτητα – και η συνεπακόλουθη οριζόντια κίνηση που γίνεται κυρίως στην διεύθυνση βορρά-νότου – δεν επηρεάζει την απόκλιση στην διεύθυνση ανατολή-δύση που οφείλεται στην Coriolis.

Θέμα 3^{o}:

(α) $\dfrac{mv_0^2}{(2R)} = \dfrac{GMm}{(2R)^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{2R}}$.
(β) $L = mrv_\phi = m2Rv_0 \sin\beta = m\sqrt{GM2R}\sin\beta$, $E = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GMm}{2R} = -\dfrac{GMm}{4R}$.
(γ) Η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{GMmR\sin^2\beta}{r^2} - \dfrac{GMm}{r}$ και τα όρια της ακτινικής κίνησης δίνονται από την $V_{\text{eff}}(r) = E \Leftrightarrow r^2 - 4Rr + 4R^2\sin^2\beta = 0 \Leftrightarrow r = 2R\,(1 \pm \cos\beta)$.
Αλλιώς: Στα άκρα της ακτινικής κίνησης είναι $\vec{r}\perp\vec{v}$ οπότε η διατήρηση στροφορμής δίνει $mrv = m\sqrt{GM2R}\sin\beta$. Η εξίσωση αυτή μαζί με την διατήρηση ενέργειας $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{GMm}{r} = -\dfrac{GMm}{4R}$ δίνουν (απαλείφοντας το v) $r^2 - 4Rr + 4R^2\sin^2\beta = 0 \Leftrightarrow r = 2R\,(1 \pm \cos\beta)$.
Ο δορυφόρος θα πέσει στην Γη αν η μικρότερη λύση είναι μικρότερη από την ακτίνα της Γης, δηλ. αν $2R\,(1-\cos\beta) < R \Leftrightarrow \cos\beta > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \beta < 60^\circ$.
(δ) Η εξίσωση τροχιάς είναι $u'' + u = \dfrac{GMm^2}{L^2} = \dfrac{1}{2R\sin^2\beta} \Leftrightarrow u = \dfrac{1 + C_1\cos\phi + C_2\sin\phi}{2R\sin^2\beta}$. Έστω αρχικά $\phi = 0$. Είναι αρχικά $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2R}$ και $u' = \dfrac{d(1/r)}{d\phi} = -\dfrac{\dot{r}}{r^2\dot{\phi}} = -\dfrac{m\dot{r}}{L} = \dfrac{\cos\beta}{2R\sin\beta}$ αφού $\dot{r} = -v_0\cos\beta$ και $L = m2Rv_0\sin\beta$, οπότε οι σταθερές προκύπτουν $C_1 = -\cos^2\beta$ και $C_2 = \sin\beta\cos\beta$. Άρα η εξίσωση τροχιάς είναι $u = \dfrac{1 - \cos^2\beta\cos\phi + \sin\beta\cos\beta\sin\phi}{2R\sin^2\beta} = \dfrac{1 - \cos\beta\cos(\phi+\beta)}{2R\sin^2\beta} \Leftrightarrow r = \dfrac{2R\sin^2\beta}{1-\cos\beta\cos(\phi+\beta)}$.
Στο περίκεντρο της τροχιάς είναι $\cos(\phi+\beta) = -1 \Leftrightarrow \phi = \pi - \beta$, κάτι που σημαίνει (βλ. σχήμα) ότι ο μεγάλος άξονας της νέας τροχιάς του δορυφόρου είναι παράλληλος με την ταχύτητα $\vec{v}_0$ που έχει αμέσως μετά την αλλαγή κατεύθυνσης.



Η εξίσωση τροχιάς δίνει επίσης ότι το περίκεντρο βρίσκεται σε απόσταση $r = \dfrac{2R\sin^2\beta}{1+\cos\beta} = 2R(1-\cos\beta)$. Θα μπορούσαμε να απαντήσουμε και το ερώτημα (γ) μέσω αυτής.

Θέμα 4^{o}:

(α) $M(r) = \displaystyle\int_0^r \rho\,4\pi r^2\,dr = \int_0^r \rho_0\,e^{-(r/r_0)^3}\,4\pi r^2\,dr \overset{x=r/r_0}{=\!=\!=} 4\pi r_0^3\rho_0 \int_0^x e^{-x^3}\,x^2\,dx$. Είναι $x^2\,dx = \dfrac{1}{3}dx^3$ και $e^{-x^3}\,x^2\,dx = -\dfrac{1}{3}de^{-x^3}$, οπότε $M(r) = 4\pi r_0^3\rho_0\left[-\dfrac{1}{3}e^{-x^3}\right]_0^x = \dfrac{4\pi r_0^3\rho_0}{3}\left[1 - e^{-(r/r_0)^3}\right]$.
Η ένταση του βαρυτικού πεδίου σε ακτίνα r είναι ακτινική με αλγεβρική τιμή $g(r) = -\dfrac{GM(r)}{r^2} = -\dfrac{4\pi G r_0^3\rho_0}{3}\dfrac{1-e^{-(r/r_0)^3}}{r^2}$ (το αρνητικό πρόσημο δηλώνει φορά προς το κέντρο).
(β) Το δυναμικό είναι $\Phi(r) = \displaystyle\int_r^\infty g(r)\,dr$ (ολοκληρώνοντας την $g = -\dfrac{d\Phi}{dr}$ θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο). Θεωρώντας ότι στο κέντρο η ταχύτητα είναι v_0 και στο άπειρο μηδενική (οριακή περίπτωση) η διατήρηση ενέργειας δίνει $\dfrac{v_0^2}{2} + \Phi(0) = 0 + \Phi(\infty)$. Άρα η ταχύτητα πρέπει να είναι $v_0 \geq \sqrt{2\,[\Phi(\infty) - \Phi(0)]}$ με την διαφορά δυναμικού να είναι $\Phi(\infty) - \Phi(0) = -\displaystyle\int_0^\infty g(r)\,dr = \dfrac{4\pi G r_0^3\rho_0}{3}\int_0^\infty \dfrac{1-e^{-(r/r_0)^3}}{r^2}\,dr$.
Θέτοντας $x = r/r_0$ προκύπτει $\Phi(\infty) - \Phi(0) = \dfrac{4\pi G r_0^2\rho_0}{3}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{1-e^{-x^3}}{x^2}\,dx = \dfrac{4\pi G r_0^2\rho_0}{3} \times 1.354$.
Αντικαθιστώντας προκύπτει $v_0 \geq 3.368\sqrt{G r_0^2\rho_0}$.