Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 24 Ιουλίου 2020
Διάρκεια εξέτασης $1\frac{1}{2}$ ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 16ης Δεκεμβρίου 2019: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

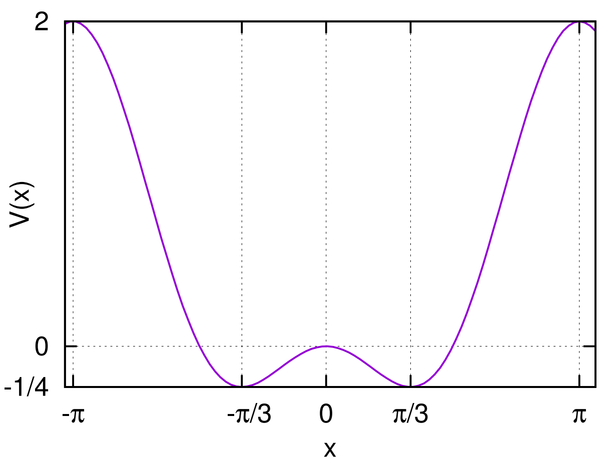
Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο:

Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται με ταχύτητα για την οποία οι $\hat{\varpi}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ συνιστώσες σε κυλινδρικές συντεταγμένες παραμένουν σταθερές σε κάθε χρόνο και ίσες με μονάδα. Η αρχική του θέση είναι $\hat{x} + \hat{z}$.
(α) Βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο.
★ (β) Δείξτε ότι η τροχιά είναι σπείρα πάνω σε κώνο.
(γ) Ποια η δύναμη που ασκείται στο σώμα;
Δίνεται $\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$.

Θέμα 2ο:

Σώμα μοναδιαίας μάζας κινείται μονοδιάστατα στο πεδίο $V(x) = \cos^2 x - \cos x$.



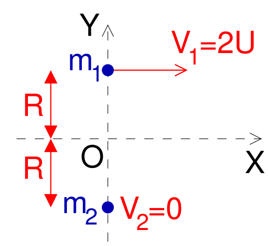
Αρχικά βρίσκεται στο σημείο $x = \pi/3$ και έχει θετική ταχύτητα υ_0.
(α) Ποια η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί για μικρές τιμές της υ_0;
(β) Για ποιες υ_0 περνά στα αρνητικά του άξονα x;

Θέμα 3ο:

(α) Σώμα μάζας m κινείται στο πεδίο της κεντρικής δύναμης $f(r)\hat{r}$. Αν L είναι η στροφορμή του σώματος, ορίσουμε $u = \frac{1}{r}$, u' και u'' είναι η πρώτη και δεύτερη παράγωγος του u ως προς την πολική γωνία ϕ στο επίπεδο της τροχιάς, δείξτε ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος γράφονται $\vec{v} = \frac{L}{m}\left(-u'\hat{r} + u\hat{\phi}\right)$ και $\vec{a} = -\frac{L^2}{m^2}u^2\left(u'' + u\right)\hat{r}$.
(β) Για ποια $f(r)$ είναι δυνατή η τροχιά $r = \phi$ σώματος με $m = 1$ και $L = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες);
(γ) Για το σώμα του προηγούμενου ερωτήματος, βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο αν αρχικά $r|_{t=0} = r_0$.
Δίνεται $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}$.

Θέμα 4ο:

Δύο άστρα με μάζες $m_1 = m_2 = m$ αλληλεπιδρούν βαρυτικά και έχουν αρχικά τις ταχύτητες και θέσεις του σχήματος με $R = \frac{Gm}{4U^2}$.



(α) Ποια η ταχύτητα του κέντρου μάζας και ποιες οι αρχικές ταχύτητες των άστρων ως προς αυτό;
(β) Δείξτε ότι τα άστρα κινούνται κυκλικά γύρω από το κέντρο μάζας (στο σύστημά του).
★ (γ) Ποια η θέση $X_1(t)$, $Y_1(t)$ του m_1 σε κάθε χρόνο; Σχεδιάστε την τροχιά του.
(δ) Κάποια στιγμή συγκρούεται πλαστικά με το m_1 αστεροειδής με ορμή $\vec{p}$. Για ποια $\vec{p}$ το κέντρο μάζας του συστήματος θα είναι ακίνητο μετά την κρούση;

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Αρχικά $z = 1$ και $x = \varpi \cos\phi = 1$, $y = \varpi \sin\phi = 0$, άρα $\varpi = 1$, $\phi = 0$.

$\dot{z} = 1 \Leftrightarrow \int_1^z dz = \int_0^t dt \Leftrightarrow z = 1 + t$,

$\dot{\varpi} = 1 \Leftrightarrow \int_1^{\varpi} d\varpi = \int_0^t dt \Leftrightarrow \varpi = 1 + t$,

$\varpi\dot{\phi} = 1 \Leftrightarrow (1+t)\dot{\phi} = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\phi} d\phi = \int_0^t \frac{dt}{1+t} \Leftrightarrow \phi = \ln(1+t)$.

(β) Απαλείφοντας τον χρόνο βρίσκουμε $z = \varpi$ (εξίσωση κώνου) και $\varpi = e^{\phi}$ (καθώς η ακτίνα αυξάνει η γωνία αυξάνει, δηλ. η κίνηση είναι σπειροειδής).

(γ) $\vec{F} = m\vec{a} = (\ddot{\varpi} - \varpi\dot{\phi}^2)\hat{\varpi} + (\varpi\ddot{\phi} + 2\dot{\varpi}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z} = -\frac{1}{\varpi}\hat{\varpi} + \frac{1}{\varpi}\hat{\phi}$.

Θέμα 2ο:

(α) Για μικρές v_0 το σώμα παραμένει στην γειτονιά του $x = \pi/3$. Θέτοντας $q = x - \pi/3$ είναι $V(x) \approx V(\pi/3) + V'(\pi/3)q + \frac{1}{2}V''(\pi/3)q^2$ με $V'(\pi/3) = 0$ και $V''(\pi/3) = 3/2$ (διότι $V'(x) = -\sin x\,(2\cos x - 1)$, $V''(x) = -\cos x\,(2\cos x - 1) + 2\sin^2 x$). Η εξίσωση κίνησης είναι $m\ddot{x} = -V'(x) \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{3}{2}q = 0$, οπότε $\omega = \sqrt{3/2}$ και $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{2/3}$.

(β) Πρέπει η ενέργεια να είναι $0 < E < 2$. Αντικαθιστώντας $E = mv_0^2/2 + V(\pi/3) = v_0^2/2 - 1/4$ βρίσκουμε $\frac{1}{\sqrt{2}} < v_0 < \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Θέμα 3ο:

(α) Η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει τη διατήρηση της στροφορμής $L = mr^2\dot{\phi}$, οπότε $\dot{\phi} = \frac{L}{m}u^2$.

Με $v_r = \dot{r} = \frac{d(1/u)}{d\phi}\dot{\phi} = -\frac{L}{m}u'$ και $v_\phi = r\dot{\phi} = \frac{L}{mr} = \frac{L}{m}u$ βρίσκουμε την έκφραση της ταχύτητας $\vec{v} = \frac{L}{m}\left(-u'\hat{r} + u\hat{\phi}\right)$.

Με $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\phi}\dot{\phi} = -\frac{L^2}{m^2}u^2u''$ προκύπτει η έκφραση της επιτάχυνσης $\vec{a} = -\frac{L^2}{m^2}u^2\,(u'' + u)\,\hat{r}$.

(β) Η εξίσωση $m\vec{a} = f\hat{r}$ δίνει $f = -\frac{L^2}{m}u^2\,(u'' + u)$. Αντικαθιστώντας $u = \frac{1}{\phi}$, $u' = -\frac{1}{\phi^2}$, $u'' = \frac{2}{\phi^3}$ και $m = 1$, $L = 1$ βρίσκουμε $f = -2u^5 - u^3$, δηλ. $f = -\frac{2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$.

(γ) Η σχέση $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$ με $\phi = r$ και $L = m$ δίνει $r^2\dot{r} = 1 \Leftrightarrow \int_{r_0}^{r} r^2 dr = \int_0^t dt \Leftrightarrow \frac{r^3}{3} - \frac{r_0^3}{3} = t \Leftrightarrow r = (r_0^3 + 3t)^{1/3}$, οπότε και $\phi = r = (r_0^3 + 3t)^{1/3}$.

Θέμα 4ο:

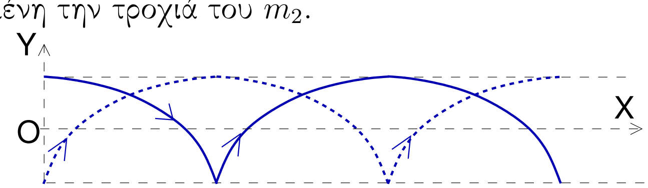
(α) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $\vec{V}_{\text{KM}} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2} = U\hat{x}$ και παραμένει σταθερή απουσία εξωτερικών δυνάμεων.

Ως προς το κέντρο μάζας αρχικά το m_1 έχει ταχύτητα $\vec{v}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_{\text{KM}} = U\hat{x}$ και το m_2 την αντίθετη $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_{\text{KM}} = -U\hat{x}$.

(β) Για το m_1 πρέπει η κεντρομόλος $\frac{m_1 v_1^2}{R}$ να ισούται με την βαρυτική δύναμη $\frac{Gm_1m_2}{(2R)^2}$ που δέχεται το m_1 από το m_2, κάτι που ισχύει λόγω της $R = \frac{Gm}{4U^2}$. Όμοια για το m_2 (οι θέσεις των δύο άστρων είναι άλλωστε σε κάθε στιγμή αντιδιαμετρικές ως προς το κέντρο μάζας).

(γ) Το m_1 εκτελεί επαλληλία δύο κινήσεων, την κίνηση του κέντρου μάζας και την κυκλική γύρω από το κέντρο μάζας με ακτίνα R και γραμμική ταχύτητα U. Η πρώτη είναι $X = Ut\hat{x}$, $Y = 0$ και η δεύτερη $x_1 = R\sin(Ut/R)$, $y_1 = R\cos(Ut/R)$. Άρα συνολικά $X_1 = Ut + R\sin(Ut/R)$, $Y_1 = R\cos(Ut/R)$.

Η τροχιά είναι κυκλοειδής. Στο σχήμα η συνεχής καμπύλη δείχνει την τροχιά του m_1 και η διακεκομμένη την τροχιά του m_2.



Όμοια συμπεραίνουμε ότι το m_2 έχει θέση σε κάθε χρόνο $X_2 = Ut - R\sin(Ut/R)$, $Y_2 = -R\cos(Ut/R)$. Αυτή είναι η λύση του συστήματος $m\ddot{\vec{R}}_1 = -\frac{Gm^2(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|^3}$, $m\ddot{\vec{R}}_2 = -\frac{Gm^2(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}$ με αρχικές συνθήκες $\vec{R}_1|_{t=0} = R\hat{y}$, $\vec{R}_2|_{t=0} = -R\hat{y}$, $\dot{\vec{R}}_1|_{t=0} = 2U\hat{x}$, $\dot{\vec{R}}_2|_{t=0} = 0$.

(δ) Πρέπει η συνολική ορμή να είναι μηδενική, άρα ο αστεροειδής πρέπει να έχει ορμή αντίθετη της συνολικής ορμής του αρχικού συστήματος, $\vec{p} = -2mU\hat{x}$.