Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 17 Φεβρουαρίου 2020
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ____, ΑΜ: ________________

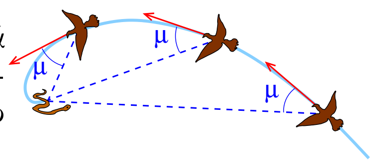
Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 16ης Δεκεμβρίου 2019: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο:

Τα γεράκια βλέπουν καλύτερα σε γωνία μ ως προς τον άξονα του κεφαλιού τους. Όταν πετούν προς ένα στόχο, για να μην γέρνουν το κεφάλι τους – κάτι που θα μείωνε την αεροδυναμική επίδοση της πτήσης – πετούν με τρόπο ώστε όλο τους το σώμα και συνεπώς και η ταχύτητά τους να σχηματίζει συνεχώς σταθερή γωνία μ με την ευθεία προς τον στόχο.

Έστω αγνοούμε την κατακόρυφη κίνηση και η γωνία είναι $\mu = 45^o$.



(α) Δείξτε ότι η τροχιά τους σε πολικές συντεταγμένες με αρχή τον στόχο είναι σπείρα $\varpi = \varpi_0 e^{-\phi}$.

(β) Ένα γεράκι μάζας m βρίσκεται αρχικά στο σημείο $\varpi = \varpi_0$, $\phi = 0$, έχει αρχική ταχύτητα υ_0 και η μόνη δύναμη που του ασκείται στην διεύθυνση της ταχύτητας είναι αντίσταση αέρα με μέτρο $m\lambda\upsilon^2$ (όπου λ σταθερά και υ η ταχύτητα).

(β_1) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας σε κάθε χρόνο;

(β_2) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στον στόχο ($\varpi = 0$);

★ (γ) Έστω λαμβάνουμε υπόψη την κατακόρυφη κίνηση και σε σφαιρικές συντεταγμένες με αρχή τον στόχο και κατακόρυφο άξονα $\hat{z}$ η κίνηση γίνεται σε κώνο $\theta =$ σταθερά. Η αρχική θέση ενός γερακιού είναι $r = r_0$, $\phi = 0$. Βρείτε την τριδιάστατη τροχιά του. Αν το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με υ σε πόσο χρόνο θα φτάσει στον στόχο;

Θέμα 2ο:

(α) Άνθρωπος μέσα σε ασανσέρ που επιταχύνεται προς τα πάνω με επιτάχυνση a_0 κρατά σώμα m σε ύψος h από το δάπεδο. Αν το αφήσει, σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο δάπεδο; Η g θεωρείται γνωστή.

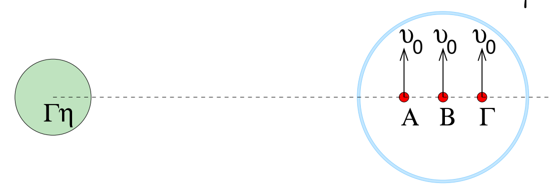
(β) Ένας θάλαμος κατεβαίνει ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ χωρίς τριβές, με επιτάχυνση $\vec{a}_0 = \vec{g}_\parallel$, την προβολή του $\vec{g}$ πάνω στο επίπεδο. Στην οροφή του είναι στηριγμένο ένα εκκρεμές. Που ισορροπεί;

(γ) Ένα τραίνο μάζας χιλίων τόνων κινείται προς βορρά με ταχύτητα 100 χιλιόμετρα την ώρα, σε τόπο με γεωγραφικό πλάτος 45^o. Ποια η οριζόντια δύναμη που ασκεί στις ράγες;

★ (δ) Ποια η φυγόκεντρος δύναμη για το τραίνο του προηγούμενου ερωτήματος; Γιατί δεν συνεισφέρει στην οριζόντια δύναμη που ασκεί το τραίνο στις ράγες; Δίνεται η ακτίνα της Γης 6400 km.

Θέμα 3ο:

Τρία σώματα ξεκινούν με ίδιες ταχύτητες $\vec{\upsilon}_0$ από τις θέσεις Α, Β, Γ του σχήματος, μέσα στο βαρυτικό πεδίο της – θεωρούμενης ακίνητης – Γης. Οι αρχικές τους αποστάσεις από το κέντρο της Γης είναι $r_A = r_0 - b$, $r_B = r_0$ και $r_\Gamma = r_0 + b$. Η ταχύτητα υ_0 είναι τέτοια ώστε το Β να εκτελέσει κυκλική τροχιά.



(α) Ποια η ενέργεια και η στροφορμή κάθε σώματος; Γνωστές θεωρούνται οι μάζες των σωμάτων και της Γης, η σταθερά G και οι αποστάσεις r_0 και b.

(β) Βρείτε τις ακρότατες αποστάσεις των σωμάτων Α και Γ από την Γη και σχεδιάστε τις τροχιές τους. Θεωρήστε γνωστή την σχέση $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_\pi)}$ με $p = \dfrac{L^2}{GMm^2}$ και $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ για κίνηση μάζας m σε πεδίο δύναμης $-\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$.

(γ) Ποιες οι περίοδοι κίνησης των σωμάτων;

(δ) Έστω το Β είναι το κέντρο μάζας διαστημόπλοιου και τα Α, Γ δύο σώματα μέσα σε αυτό, οπότε ισχύει $b \ll r_0$. Ποια η αρχική επιτάχυνση των Α και Γ ως προς το Β; Περιγράψτε την κίνηση που εκτελούν τα Α και Γ μέσα στο διαστημόπλοιο.

Θέμα 4ο:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται σε ελκτικό κεντρικό δυναμικό $V = -\dfrac{1}{r^4}$ (σε κατάλληλες μονάδες) με στροφορμή L.

(α) Βρείτε και σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό.

(β) Υπάρχουν κυκλικές τροχιές; Είναι ευσταθείς;

(γ) Έστω αρχικά το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = +\infty$, $y = \sqrt{2}$ και έχει ταχύτητα $-\sqrt{2}\,\hat{x}$ (δηλ. πλησιάζει από το άπειρο με παράμετρο κρούσης $b = \sqrt{2}$ και ταχύτητα $\upsilon_\infty = \sqrt{2}$).

(γ_1) Ποια η στροφορμή και η ενέργειά του;

(γ_2) Πως θα κινείται σε «μεγάλους» χρόνους;

★ (γ_3) Ποια η τροχιά $r = r(\phi)$;

Δίνεται $\displaystyle\int \frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\xi}{1-\xi}\right| +$ σταθερά.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) Σε πολικές συντεταγμένες η θέση είναι $\vec{r} = \varpi\hat{\varpi}$ και η ταχύτητα $\vec{v} = \dot{\varpi}\hat{\varpi} + \varpi\dot{\phi}\hat{\phi}$. Η ταχύτητα σχηματίζει συνεχώς γωνία $\mu = 45^o$ με την ακτίνα, άρα οι δύο συνιστώσες είναι ίσες κατά μέτρο. Θεωρώντας άξονες στους οποίους η γωνία ϕ αυξάνεται καθώς το ϖ μειώνεται – θα μπορούσαμε να επιλέγαμε τους άξονες ώστε να συμβαίνει το αντίθετο) ισχύει $\dot{\varpi} = -v\cos\mu = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ και $\varpi\dot{\phi} = v\sin\mu = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Άρα $\dot{\varpi} = -\varpi\dot{\phi} \Leftrightarrow d\varpi = -\varpi d\phi \Leftrightarrow \int \frac{d\varpi}{\varpi} = -\int d\phi \Leftrightarrow \ln\varpi = -\phi + \mathcal{C} \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0 e^{-\phi}$, όπου $\mathcal{C} = \ln\varpi_0$ σταθερά ολοκλήρωσης (η οποία ισούται με τον λογάριθμο της απόστασης από το κέντρο όταν η γωνία είναι $\phi = 0$).

(β_1) Η επιτρόχια συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει $m\dot{v} = -m\lambda v^2$, διαφορική χωριζομένων μεταβλητών που ολοκληρώνεται και δίνει $-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \lambda \int_0^t dt \Leftrightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \lambda t \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{1+\lambda v_0 t}$.

(β_2) Η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι $\dot{\varpi} = -\frac{v}{\sqrt{2}} = -\frac{v_0/\sqrt{2}}{1+\lambda v_0 t}$ και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε την απόσταση σε κάθε χρόνο $\int_{\varpi_0}^{\varpi} d\varpi = \int_0^t \frac{-v_0/\sqrt{2}}{1+\lambda v_0 t} dt \Leftrightarrow \varpi = \varpi_0 - \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\ln(1+\lambda v_0 t)$.
Το γεράκι φτάνει στον στόχο όταν $\varpi = 0 \Leftrightarrow \lambda\varpi_0\sqrt{2} = \ln(1+\lambda v_0 t) \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda v_0}\left(e^{\lambda\varpi_0\sqrt{2}} - 1\right)$.

(γ) Είναι $\vec{r} = r\hat{r}$ και $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$ (η θ συνιστώσα της ταχύτητας $r\dot{\theta}$ μηδενίζεται αφού η θ είναι σταθερή). Όπως πριν $\dot{r} = -v\cos\mu = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ και $r\sin\theta\dot{\phi} = v\sin\mu = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Άρα $\dot{r} = -r\sin\theta\dot{\phi} \Leftrightarrow dr = -r\sin\theta d\phi$ (θεωρώντας ότι η ϕ αυξάνει καθώς η απόσταση r μειώνεται) και ολοκληρώνοντας $\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = -\sin\theta\int_0^{\phi} d\phi \Leftrightarrow \ln\frac{r}{r_0} = -\phi\sin\theta \Leftrightarrow r = r_0 e^{-\phi\sin\theta}$, δηλ. προκύπτει ξανά σπείρα (πάνω στον κώνο $\theta =$ σταθερό).
Αν η ταχύτητα v είναι σταθερή θα είναι $\dot{r} = -\frac{v}{\sqrt{2}} =$ σταθερά και ολοκληρώνοντας $r - r_0 = -\frac{vt}{\sqrt{2}}$. Άρα το γεράκι φτάνει στον στόχο όταν $r = 0 \Leftrightarrow t = \frac{r_0\sqrt{2}}{v}$.

Θέμα 2ο:

(α) Στο μη-αδρανειακό σύστημα του ασανσέρ ο νόμος Νεύτωνα είναι $m\vec{a}_\sigma = m\vec{g} - m\vec{a}_0$ (προσθέσαμε την ψευδοδύναμη $-m\vec{a}_0$) οπότε η επιτάχυνση του m είναι $g + a_0$ με φορά προς τα κάτω. Μήκος h διανύεται όταν $h = a_\sigma t^2/2 \Leftrightarrow t = \sqrt{2h/(g+a_0)}$.
Θα μπορούσαμε να εργαστούμε στο αδρανειακό: Αν τον χρόνο $t = 0$ που ο άνθρωπος αφήνει το m η ταχύτητα είναι v_0 (και του ασανσέρ και του m) σε χρόνο t το δάπεδο του ασανσέρ ανεβαίνει κατά $v_0 t + a_0 t^2/2$ και το m ανεβαίνει (αλγεβρικά) κατά $v_0 t - g t^2/2$. Η αρχική τους απόσταση είναι h, άρα συναντώνται όταν $(v_0 t + a_0 t^2/2) - (v_0 t - g t^2/2) = h \Leftrightarrow t = \sqrt{2h/(g+a_0)}$.
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να εργαστούμε στο αδρανειακό που έχει την ταχύτητα του ασανσέρ τον χρόνο $t = 0$. Σε αυτό το σύστημα σε χρόνο t το δάπεδο του ασανσέρ ανεβαίνει κατά $a_0 t^2/2$ και το m κατεβαίνει κατά $g t^2/2$, οπότε συναντώνται όταν $a_0 t^2/2 + g t^2/2 = h \Leftrightarrow t = \sqrt{2h/(g+a_0)}$.

(β) Στο μη-αδρανειακό σύστημα του θαλάμου ο νόμος Νεύτωνα στην ισορροπία είναι $0 = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0 = \vec{T} + m\vec{g}_{\rm eff}$ όπου η ενεργός βαρύτητα είναι $\vec{g}_{\rm eff} = \vec{g} - \vec{a}_0 = \vec{g} - \vec{g}_\parallel = \vec{g}_\perp$. Επομένως το εκκρεμές ισορροπεί σε κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο.
Το ίδιο βέβαια προκύπτει και αν εργαστούμε στο αδρανειακό σύστημα όπου το εκκρεμές έχει την επιτάχυνση του θαλάμου, άρα $m\vec{a}_0 = \vec{T} + m\vec{g}$.

(γ) Στο μη-αδρανειακό σύστημα της περιστρεφόμενης Γης η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, συμπεριλαμβανομένης της Coriolis η οποία έχει οριζόντια συνιστώσα $\vec{F}_{c\parallel} = -2m\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}$ με φορά προς ανατολάς και μέτρο $2m(\omega\sin\lambda)v$. Οι ράγες ασκούν στο τραίνο δύναμη $-\vec{F}_{c\parallel}$ η οποία εξουδετερώνει την $\vec{F}_{c\parallel}$, άρα το τραίνο ασκεί στις ράγες την αντίδραση, δηλ. δύναμη $\vec{F}_{c\parallel}$. Με $m = 10^3 \times 10^3$ kg, $\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{ημέρα}} = \frac{2\pi}{24\times 3600}$ Hz, $\sin\lambda = 1/\sqrt{2}$, $v = 100 \times (10^3\,\mathrm{m})/(3600\,\mathrm{s})$, το μέτρο της δύναμης είναι 2857 N (η φορά προς ανατολάς).

(δ) Στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο της Γης η φυγόκεντρος έχει μέτρο $m\omega^2 R\cos\lambda = 23900$ N και φορά από τον άξονα περιστροφής της Γης προς τα έξω. Η οριζόντια συνιστώσα της είναι $m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda = 16900$ N.
Δεν συνεισφέρει γιατί το βάρος μαζί με την φυγόκεντρο έχει συνισταμένη που καθορίζει την κατακόρυφο σε κάθε τόπο. Με άλλα λόγια η οριζόντια συνιστώσα της φυγόκεντρου εξουδετερώνεται από την οριζόντια συνιστώσα του πραγματικού βάρους.

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Για το Β είναι $\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$.

(α) $\frac{E_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0 - b} = -\frac{GM(r_0+b)}{2r_0(r_0-b)}$,

$\frac{E_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0} = -\frac{GM}{2r_0}$,

$\frac{E_{\Gamma}}{m_{\Gamma}} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{r_0 + b} = -\frac{GM(r_0-b)}{2r_0(r_0+b)}$,

$\frac{L_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} = v_0(r_0 - b) = \sqrt{\frac{GM(r_0-b)^2}{r_0}}$,

$\frac{L_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} = v_0 r_0 = \sqrt{GMr_0}$,

$\frac{L_{\Gamma}}{m_{\Gamma}} = v_0(r_0 + b) = \sqrt{\frac{GM(r_0+b)^2}{r_0}}$.

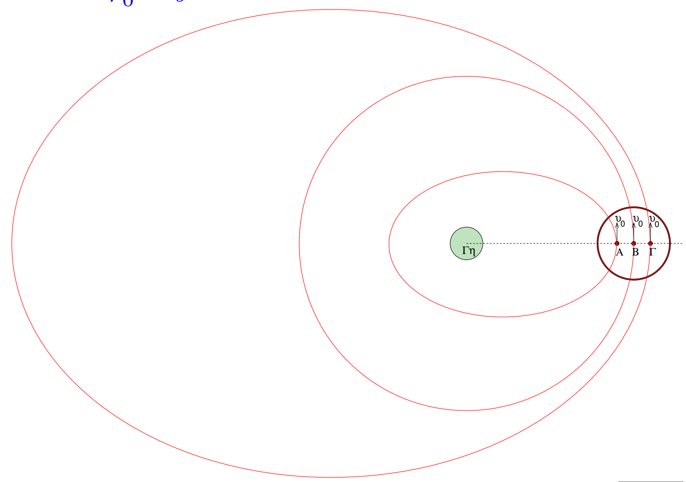
Τα αποτελέσματα για το Γ προκύπτουν από αυτά του Α, απλά αλλάζοντας το πρόσημο του b.

(β) Λόγω του ότι ισχύει $r_0 > b$ (αλλιώς θα ήταν $r_{\mathrm{A}} \leq 0$) και τα τρία σώματα έχουν αρνητική ενέργεια. Το Β γνωρίζουμε ότι κινείται κυκλικά, ενώ τα Α και Γ κινούνται ελλειπτικά. Η αρχική ακτίνα είναι αψίδα της τροχιάς τους (αφού η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα), δηλ. ακρότατη. Το αν είναι ελάχιστη ή μέγιστη μπορούμε να το συμπεράνουμε χρησιμοποιώντας την σχέση $r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_\pi)}$. Η ελάχιστη απόσταση είναι $r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon}$ (στο περίκεντρο $\phi = \phi_\pi$) και η μέγιστη $r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon}$ (στο απόκεντρο $\phi = \phi_\pi + \pi$).

Για το Α είναι $p = \frac{L_A^2}{GMm_A^2} = \frac{(r_0-b)^2}{r_0}$ και $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_A L_A^2}{G^2M^2m_A^3}} = \frac{b}{r_0}$, οπότε η ελάχιστη απόσταση είναι $r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{(r_0-b)^2}{r_0+b}$ και η μέγιστη $r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon} = r_0 - b$. Η αρχική ακτίνα είναι η μέγιστη, δηλ. το Α εκτελεί ελλειπτική τροχιά με το αρχικό σημείο να είναι το απόκεντρο της τροχιάς.

Για το Γ όμοια βρίσκουμε $p = \frac{(r_0+b)^2}{r_0}$, $\varepsilon = \frac{b}{r_0}$, $r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon} = r_0 + b$ και $r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon} = \frac{(r_0+b)^2}{r_0-b}$. Η αρχική ακτίνα είναι η ελάχιστη, δηλ. το Γ εκτελεί ελλειπτική τροχιά με το αρχικό σημείο να είναι το περίκεντρο της τροχιάς.

Οι ακρότατες ακτίνες μπορούν να βρεθούν και μέσω του ενεργού δυναμικού· για το Α είναι οι λύσεις της εξίσωσης $V_{\mathrm{eff},\mathrm{A}}(r) = \frac{E_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} \Leftrightarrow -\frac{GM}{r} + \frac{GM(r_0-b)^2}{2r_0r^2} = -\frac{GM(r_0+b)}{2r_0(r_0-b)} \Leftrightarrow \frac{r_0+b}{r_0-b}r^2 - 2r_0r + (r_0-b)^2 = 0 \Leftrightarrow r = r_0 - b$ (η αρχική ακτίνα) και $r = \frac{(r_0-b)^2}{r_0+b}$ (ακτίνα περίκεντρου). Τα αποτελέσματα για το Γ προκύπτουν από αυτά του Α, απλά αλλάζοντας το πρόσημο του b, δηλ. οι ακρότατες ακτίνες είναι οι $r = r_0 + b$ (η αρχική ακτίνα) και η $r = \frac{(r_0+b)^2}{r_0-b}$ (ακτίνα απόκεντρου).



(γ) Για το σώμα Β είναι $T_{\mathrm{B}} = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}$. Για τα άλλα σώματα, σύμφωνα με το νόμο του Kepler το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα. Ο συντελεστής αναλογίας βρίσκεται εύκολα από την περίπτωση της κυκλικής τροχιάς και έχουμε $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$. Ο μεγάλος ημιάξονας είναι το ημιάθροισμα των αποστάσεων στο απόκεντρο και το περίκεντρο $a = \frac{r_a + r_\pi}{2}$.

Για το Α έχουμε βρει $r_a = r_0 - b$, $r_\pi = \frac{(r_0-b)^2}{r_0+b}$, οπότε $a = \frac{r_0-b}{r_0+b}r_0$ και $T_A = \left(\frac{r_0-b}{r_0+b}\right)^{3/2} T_{\mathrm{B}}$.

Για το Γ όμοια (απλά αλλάζοντας το πρόσημο του b) η περίοδος προκύπτει $T_\Gamma = \left(\frac{r_0+b}{r_0-b}\right)^{3/2} T_{\mathrm{B}}$.

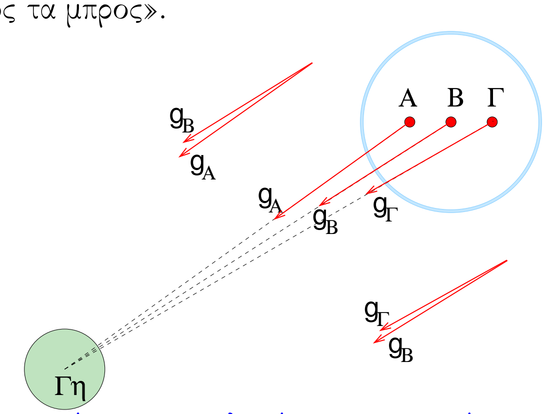
Προφανώς $T_{\mathrm{A}} < T_{\mathrm{B}} < T_{\Gamma}$.

(δ) Η επιτάχυνση βαρύτητας σε κάθε σημείο είναι $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$. Για δύο κοντινά σημεία πάνω στην ίδια κατεύθυνση από το κέντρο (ίδιο $\hat{r}$), το παλιρροϊκό πεδίο είναι $\vec{g}|_r - \vec{g}|_{r_0} \approx \left.\frac{dg}{dr}\right|_{r_0}(r - r_0)\hat{r} = \frac{2GM}{r_0^3}(r - r_0)\hat{r}$. Επομένως η αρχική επιτάχυνση του Α ως προς το Β είναι $\vec{g}|_{r_0-b} - \vec{g}|_{r_0} = -\frac{2GMb}{r_0^3}\hat{r}$. Όμοια η αρχική επιτάχυνση του Γ ως προς το Β είναι

$\vec{g}|_{r_0+b} - \vec{g}|_{r_0} = \dfrac{2GMb}{r_0^3}\hat{r}$.

Τα Α και Γ θα αρχίσουν να κινούνται απομακρυνόμενα από το κέντρο του διαστημοπλοίου Β – όπως άλλωστε συμπεραίνουμε και από την μελέτη των τροχιών που προηγήθηκε – και κάποια στιγμή θα χτυπήσουν στα τοιχώματά του.

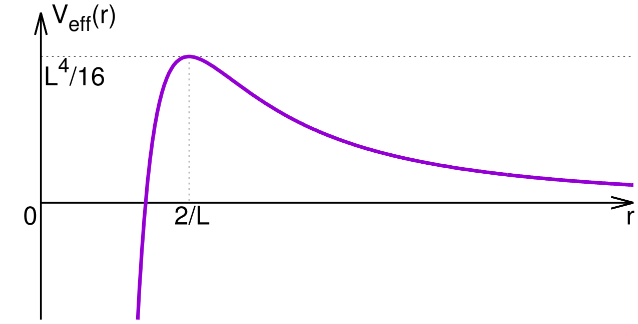
Οι τροχιές τους δεν θα είναι ευθύγραμμες, γιατί τα $\vec{g}|_r$ και $\vec{g}|_{r_0}$ δεν είναι συγγραμμικά (αυτό συμβαίνει μόνο στην αρχική στιγμή). Μπορούμε μάλιστα να αφαιρέσουμε διανυσματικά τα $\vec{g}$ και $\vec{g}|_{r_0}$ και να καταλάβουμε προς τα που καμπυλώνονται οι τροχιές. Για το Α, θα υπάρχει μια συνιστώσα του $\vec{g}_{\rm A} - \vec{g}_{\rm B}$ αντίρροπη στην κίνηση του διαστημοπλοίου (βλέπε σχήμα το οποίο δείχνει τις μάζες σε χρόνο λίγο μεγαλύτερο του αρχικού· φαίνονται τα $\vec{g}_{\rm A}$ και $\vec{g}_{\rm B}$ με κοινή αρχή για να φανεί η διαφορά τους $\vec{g}_{\rm A} - \vec{g}_{\rm B}$), επομένως το Α κινείται απομακρυνόμενο από το κέντρο και ταυτόχρονα «μένει πίσω». Όμοια για το Γ, θα υπάρχει μια συνιστώσα του $\vec{g}_\Gamma - \vec{g}_{\rm B}$ ομόρροπη στην κίνηση του διαστημοπλοίου (βλέπε σχήμα), επομένως το Γ κινείται απομακρυνόμενο από το κέντρο και ταυτόχρονα «προς τα μπρος».



Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τις κινήσεις στο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με το διαστημόπλοιο, χωρίς να περιστρέφονται οι άξονές του. Η σχετική επιτάχυνση που βρέθηκε είναι η $\vec{a}_\sigma$, η οποία ισούται με $\vec{a}_\sigma = \vec{g} - \vec{a}_0$, όπου $\vec{a}_0 = \vec{g}|_{r_0}$. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να επιλέγαμε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με το διαστημόπλοιο και έχει άξονες που περιστρέφονται, ώστε ο ένας συνεχώς να περνά από το κέντρο της Γης. Η μελέτη σε αυτό το σύστημα θα έπρεπε να λαμβάνει υπόψη την φυγόκεντρο και την Coriolis επιτάχυνση. Στο σύστημα αυτό η αρχική ταχύτητα των σωμάτων δεν είναι μηδενική, προκύπτει από την σχέση $\vec{v}_a = \vec{v}_\sigma + \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_\sigma$ και είναι $\vec{v}_\sigma = -\vec{\omega}\times\vec{r}_\sigma$.

Θέμα $4^{\rm o}$:

(α) $V_{\rm eff} = \dfrac{L^2}{2r^2} - \dfrac{1}{r^4} = \dfrac{L^4}{16} - \left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{L^2}{4}\right)^2$, μέγιστο στο $r = 2/L$ ίσο με $L^4/16$. Επίσης $\lim_{r\to 0} V(r) = -\infty$ και $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$.



(β) Οι κυκλικές τροχιές αντιστοιχούν στο ακρότατο του $V_{\rm eff}$, έχουν ακτίνα $r = 2/L$ (οποιαδήποτε ακτίνα, αρκεί η στροφορμή να είναι κατάλληλη).
Το ίδιο από $F = mv^2/r \Leftrightarrow 4/r^5 = v^2/r$ με $L = vr$.
Η τροχιά είναι ασταθής αφού αντιστοιχεί σε μέγιστο του ενεργού δυναμικού.

(γ_1) $L = mbv_\infty = 2$, $E = v_\infty^2/2 = 1$.

(γ_2) Η ενέργεια ισούται με το μέγιστο του ενεργού δυναμικού στο $r = 2/L = 1$. Άρα το σώμα πλησιάζει επ' άπειρον την ακτίνα αυτή στην οποία η ακτινική κινητική ενέργεια μηδενίζεται, δηλ. το σώμα καταλήγει να κινείται κυκλικά στον κύκλο $r = 1$.

(γ_3) $\dfrac{\dot{r}^2}{2} + \dfrac{2}{r^2} - \dfrac{1}{r^4} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\dot{r}^2}{2} = \left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \dot{r} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right)$ (έχει επιλεγεί η λύση με $\dot{r} < 0$). Άρα $d\phi = \dfrac{L}{r^2}dt = \dfrac{L}{r^2\dot{r}}dr$ και αφού αρχικά $\phi = 0$ και $r = \infty$ η ολοκλήρωση δίνει $\phi = \displaystyle\int_\infty^r \frac{\sqrt{2}\,dr}{1-r^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{r+1}{r-1} \Leftrightarrow e^{\phi\sqrt{2}} = \frac{r+1}{r-1} \Leftrightarrow r = \coth\frac{\phi}{\sqrt{2}}$ (οριακός κύκλος το ασταθές σημείο ισορροπίας $r = 1$).

Το ίδιο από $u'' + u = -\dfrac{mF}{L^2u^2}$ με $F = -V' = -4u^5$, οπότε $u'' + u = u^3$. Με $u'' = \dfrac{du'}{du}u'$ η σχέση ολοκληρώνεται σε $u'^2/2 + u^2/2 = u^4/4 + C$. Οι αρχικές συνθήκες $u|_{\phi=0} = 0$ και $u'|_{\phi=0} = \left.\dfrac{-\dot{r}/r^2}{\dot{\phi}}\right|_{\phi=0} = \left.\dfrac{-\dot{r}/r^2}{L/mr^2}\right|_{\phi=0} = \left.\dfrac{v_\infty}{L/m}\right|_{\phi=0} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ δίνουν $C = 1/4$ οπότε $2u'^2 = u^4 - 2u^2 + 1$ (η σχέση αυτή προκύπτει και από το ολοκλήρωμα ενέργειας με $\dot{r} = -(L/m)u'$). Η ρίζα της παραπάνω, επιλέγοντας το κατάλληλο πρόσημο για να ισχύει η αρχική συνθήκη, δίνει $\sqrt{2}\,u' = 1 - u^2$ και ολοκληρώνεται σε $\phi = \displaystyle\int_0^u \frac{\sqrt{2}\,du}{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow e^{\phi\sqrt{2}} = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow u = \tanh(\phi/\sqrt{2})$.