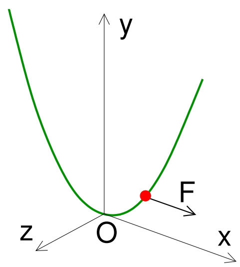
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 16 Δεκεμβρίου 2019
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Θέμα 1^{o}:

Δαχτυλίδι μάζας $m = 1$ (σε κατάλληλες μονάδες) κινείται στην λεία παραβολή $y = \dfrac{x^2}{2}$. Στο δαχτυλίδι ασκείται κατάλληλη δύναμη $F(x)\hat{x}$ (πέραν της αντίδρασης από την παραβολή) με αποτέλεσμα η $\hat{x}$ συνιστώσα της ταχύτητάς του να είναι $\dot{x} = 1$ σε κάθε χρόνο. Αγνοήστε το βάρος.
(α) Βρείτε σε κάθε θέση x τα μοναδιαία πάνω και κάθετα στην κίνηση (τα $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{n}$), τις αντίστοιχες συνιστώσες της επιτάχυνσης ($\vec{a}_\varepsilon$ και $\vec{a}_\kappa$) και την ακτίνα καμπυλότητας της παραβολής ($\mathcal{R}$).
(β) Ποια η δύναμη $F(x)\hat{x}$ και ποιο το έργο της για την μετακίνηση από $x = 0$ σε $x = 2$;
(γ) Έστω η παραβολή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \hat{y}$ γύρω από τον άξονα $\hat{y}$ και συνεχίζει να ισχύει $\dot{x} = 1$ στο περιστρεφόμενο σύστημά της.



(γ_1) Ποια είναι η $F(x)\hat{x}$ σε αυτή την περίπτωση;
★ (γ_2) Ποια η δύναμη που ασκεί η παραβολή στο δαχτυλίδι και ποια η ισχύς της;

Θέμα 2^{o}:

Σώμα μάζας $m = 1$ κινείται μονοδιάστατα στο δυναμικό $V(x) = \dfrac{1}{2}\tan^2 x$ (σε κατάλληλες μονάδες).
(α) Σχεδιάστε το δυναμικό στην περιοχή $|x| < \pi/2$ και περιγράψτε την κίνηση που αντιστοιχεί σε ενέργεια E.
(β) Βρείτε την περίοδο της κίνησης σαν συνάρτηση της ενέργειας E.
(γ) Σχολιάστε το αποτέλεσμα για μικρές και μεγάλες ενέργειες, όπου το δυναμικό προσεγγίζεται σαν αρμονικό και απειρόβαθο πηγάδι, αντίστοιχα.
★ (δ) Βρείτε την σχέση μεταξύ θέσης και χρόνου αν για $t = 0$ είναι $x = 0$ και $\dot{x} = v_0$.
(ε) Έστω το σώμα είναι αρχικά ($t = 0$) ακίνητο στην αρχή του άξονα και ασκείται η δύναμη $0.01\cos(t\sqrt{2})$, επιπλέον της δύναμης από το δυναμικό. Βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο, υποθέτοντας ότι ισχύει συνεχώς $|x| \ll 1$. Επαληθεύεται από την λύση η υπόθεση αυτή;
Θα φτάσει το σώμα ακριβώς στο σημείο $x = 0.02$;
Δίνεται $\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{2E+1}\,dx}{\sqrt{2E - \tan^2 x}} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2E+1}{2E}}\sin x\right)$ για $|x| \leq \dfrac{\pi}{2}$. Επίσης $|\sin x| = \sqrt{\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$.

Θέμα 3^{o}:

Έστω ιδανικό εκκρεμές με σώμα μάζας $m = 1$ και νήμα μήκους $R = 1$, μέσα σε βαρύτητα $g = 1$ (όλα σε κατάλληλες μονάδες). Στο σώμα ασκείται το βάρος, η τάση του νήματος και αντίσταση αντίρροπη της ταχύτητας με μέτρο $\dfrac{1}{2}v^2\,|\tan\phi|$, όπου v η ταχύτητα και ϕ η γωνία μεταξύ νήματος και κατακόρυφου. Το σώμα ξεκινά από το κατώτερο σημείο με οριζόντια ταχύτητα v_0.
(α) Ποια η διαφορική εξίσωση που δίνει την $v^2 = f(\phi)$ όσο το σώμα ανεβαίνει;
(β) Επιλύστε την εξίσωση αυτή για να βρείτε την ταχύτητα σε κάθε θέση όσο το σώμα ανεβαίνει. Σε ποια θέση σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά; Πόση μηχανική ενέργεια έχει χαθεί μέχρι εκείνη την στιγμή;
(γ) Ποιο ορισμένο ολοκλήρωμα δίνει τον χρόνο ανόδου μέχρι το σώμα να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά; (Δεν χρειάζεται να το υπολογίσετε.)
★ (δ) Επαναλάβατε για την κάθοδο, δηλ. βρείτε την ταχύτητα σε κάθε θέση μέχρι το σώμα να φτάσει στην κατώτερη θέση, την ταχύτητα στην θέση αυτή και το ορισμένο ολοκλήρωμα που δίνει τον χρόνο καθόδου.
(ε) Σχεδιάστε ποιοτικά το διάγραμμα φάσης για την κίνηση του εκκρεμούς.
Δίνεται ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{df}{d\phi} + f\tan\phi = -2\sin\phi$ είναι $f = \cos\phi\,\ln(D\cos^2\phi)$ και της $\dfrac{df}{d\phi} - f\tan\phi = -2\sin\phi$ είναι $f = \dfrac{C + \cos^2\phi}{\cos\phi}$.

<u>ΛΥΣΕΙΣ:</u>

<u>Θέμα 1ο:</u>

(α) $\dot y = x\dot x = x$, $\vec v = \hat x + x\hat y$, $\vec a = \dot{\vec v} = \dot x \hat y = \hat y$, $\hat\varepsilon = \dfrac{\vec v}{|\vec v|} = \dfrac{\hat x + x\hat y}{\sqrt{1+x^2}}$, $\vec a_\varepsilon = (\vec a\cdot\hat\varepsilon)\,\hat\varepsilon = \dfrac{x\hat x + x^2\hat y}{1+x^2}$, $\vec a_\kappa = \vec a - \vec a_\varepsilon = \dfrac{-x\hat x + \hat y}{1+x^2}$, $\hat n = \dfrac{\vec a_\kappa}{|\vec a_\kappa|} = \dfrac{-x\hat x+\hat y}{\sqrt{1+x^2}}$, $\mathcal{R} = |\vec v|^2/|\vec a_\kappa| = (1+x^2)^{3/2}$.

(β) Ο νόμος Νεύτωνα $m\vec a = F(x)\hat x + \vec N$ έχει συνιστώσα πάνω στην τροχιά (όπου η αντίδραση $\vec N$ δεν έχει συνιστώσα) $\vec a\cdot\hat\varepsilon = F(x)\hat x\cdot\hat\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = F(x)\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow$ $F(x) = x$.

Αλλιώς: Η δύναμη $F(x)\hat x$ είναι συντηρητική. Αν $V(x)$ η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια, υπάρχει ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{mv^2}{2} + V(x) = E$ (η αντίδραση από την παραβολή, σαν κάθετη στην κίνηση δεν συνεισφέρει στην ενέργεια). Αντικαθιστώντας την ταχύτητα προκύπτει $V(x) = E - \dfrac{1+x^2}{2}$, δηλ. $V(x) = -\dfrac{x^2}{2} +$ σταθερά. Επομένως $\vec F = -\nabla V = x\hat x$.

Το έργο είναι $\displaystyle\int \vec F\cdot d\vec r = \int_0^2 x\,dx = 2$. (Είναι ίσο με την μεταβολή κινητικής ενέργειας $\Delta\dfrac{mv^2}{2} = \Delta\dfrac{1+x^2}{2}$.)

(γ) Ο νόμος Νεύτωνα στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι $m\vec a = F(x)\hat x + \vec N + m\omega^2\vec r_\perp - 2m\vec\omega\times\vec v$, όπου $\vec r_\perp = x\hat x$ και $\vec\omega\times\vec v = -\hat z$.

(γ_1) Η συνιστώσα πάνω στην εφαπτομένη της παραβολής (όπου η $\vec N$ και η Coriolis δεν έχουν συνιστώσα) δίνει $\vec a\cdot\hat\varepsilon = F(x)\hat x\cdot\hat\varepsilon + x\hat x\cdot\hat\varepsilon \Leftrightarrow F(x) = 0$.

Αλλιώς: Η δύναμη $F(x)\hat x$ είναι συντηρητική. Αν $V(x)$ η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια, υπάρχει ολοκλήρωμα «ενέργειας» στο οποίο συνεισφέρει και η δυναμική ενέργεια της φυγόκεντρου $-\dfrac{m\omega^2 r_\perp^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2}$, άρα ισχύει $\dfrac{mv^2}{2} + V(x) - \dfrac{x^2}{2} = E$. Αντικαθιστώντας την ταχύτητα προκύπτει $V(x) =$ σταθερά. Επομένως $\vec F = -\nabla V = 0$.

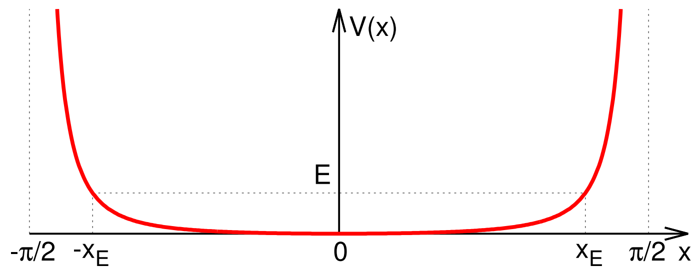
(γ_2) Η αντίδραση είναι (από τον νόμο Νεύτωνα) $\vec N = m\vec a - F(x)\hat x - m\omega^2\vec r_\perp + 2m\vec\omega\times\vec v = -x\hat x + \hat y - 2\hat z$.

Η ταχύτητα στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι $\vec v_a = \vec v + \vec\omega\times\vec r = \hat x + x\hat y - x\hat z$. Η ισχύς της αντίδρασης είναι $\vec N\cdot\vec v_a = 2x$. (Είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\dfrac{mv_a^2}{2} = \dfrac{1+2x^2}{2}$.)

Την ισχύ αυτή την προσφέρει ο εξωτερικός παράγοντας που φροντίζει να περιστρέφεται η παραβολή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

<u>Θέμα 2ο:</u>

(α) Το δυναμικό απειρίζεται στα άκρα $x = \pm\pi/2$ και έχει ελάχιστο στο $x = 0$, ίσο με $V(0) = 0$. (Είναι $V'(x) = \tan x/\cos^2 x$ επομένως η $V(x)$ είναι αύξουσα για $x > 0$. Επίσης είναι άρτια.)



Η κίνηση που αντιστοιχεί σε κάθε ενέργεια E είναι ταλάντωση μεταξύ των σημείων όπου $V(x) = E \Leftrightarrow x = \pm x_E$ με $x_E = \arctan\sqrt{2E}$.

(β) Η περίοδος είναι $T = 2\displaystyle\int_{-x_E}^{x_E}\frac{dx}{\dot x}$, όπου $\dfrac{\dot x^2}{2} + V = E \Leftrightarrow |\dot x| = \sqrt{2E - \tan^2 x}$, δηλ. $T = \displaystyle\int_{-x_E}^{x_E}\frac{2\,dx}{\sqrt{2E-\tan^2 x}}$. Λόγω της αρτιότητας της ολοκληρωτέας συνάρτησης είναι $T = \displaystyle\int_0^{x_E}\frac{4\,dx}{\sqrt{2E-\tan^2 x}}$ και χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα $T = \dfrac{4}{\sqrt{2E+1}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2E+1}{2E}}\sin x_E\right)$.

Όμως $\sin x_E = \sqrt{\dfrac{\tan^2 x_E}{1+\tan^2 x_E}} = \sqrt{\dfrac{2E}{1+2E}}$ οπότε $T = \dfrac{4}{\sqrt{2E+1}}\arcsin 1 = \dfrac{4}{\sqrt{2E+1}}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2E+1}}$.

(γ) Για μικρές ενέργειες έχουμε αρμονική ταλάντωση με $V \approx \dfrac{1}{2}x^2$, οπότε $\dfrac{\dot x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} = E$, ή παραγωγίζοντας $\ddot x + x = 0$. Άρα $\omega = 1$ και $T = 2\pi$.

Για μεγάλες ενέργειες το σώμα φτάνει στα «τοιχώματα» και ανακλάται χωρίς ουσιαστικά να «νοιώθει» το δυναμικό, πέρα από τις στιγμές των κρούσεων. Δηλ. η ταχύτητά του έχει μέτρο $\sqrt{2(E-V)} \approx \sqrt{2E}$ πρακτικά σε κάθε χρόνο. Το μήκος που διανύει σε μια περίοδο είναι 2π, άρα $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2E}}$.

(δ) $\dot x = \pm\sqrt{2E - \tan^2 x} \Leftrightarrow \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2E-\tan^2 x}} = \pm\int dt \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2E+1}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2E+1}{2E}}\sin x\right) = \pm t +$ C_0. Αντιστρέφοντας και αλλάζοντας κατάλληλα την σταθερά ώστε να απορροφήσει το πρόσημο $\pm$ βρίσκουμε

$\sin x = \sqrt{\dfrac{2E}{2E+1}} \sin\left[\sqrt{2E+1}\, t + C\right]$. Από τις αρχικές συνθήκες είναι $E = v_0^2/2$, $x|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \sin C = 0$ και $\dot{x}|_{t=0} = v_0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2E}\cos C = |v_0|\cos C$, οπότε προκύπτει $\sin x = \dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2+1}} \sin\left(\sqrt{v_0^2+1}\; t\right)$.

(ε) Για $|x| \ll 1$ είναι $V \approx \dfrac{1}{2}x^2$ και η αντίστοιχη δύναμη είναι $-\nabla V = -x\hat{x}$. Προσθέτοντας και την δύναμη διεγέρτη ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\ddot{x} + x = 0.01\cos(t\sqrt{2})$.
Η λύση της ομογενούς είναι $C_1 \sin t + C_2 \cos t$ ενώ μια μερική λύση είναι $A\cos(t\sqrt{2})$ με την αντικατάσταση να δίνει $A = -0.01$. Άρα η γενική λύση είναι $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t - 0.01\cos(t\sqrt{2})$. Από αρχικές συνθήκες $x|_{t=0} = 0$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$ βρίσκουμε $C_2 = 0.01$ και $C_1 = 0$, άρα $x = 0.01\left[\cos t - \cos(t\sqrt{2})\right]$.
Προφανώς είναι $x_{\max} \le 0.02 \ll 1$ (αφού $|\cos t| \le 1$ και $|\cos(t\sqrt{2})| \le 1$), άρα η υπόθεση επαληθεύεται.
Το σώμα δεν θα φτάσει ακριβώς στο $x = 0.02$ γιατί θα έπρεπε να συναληθεύουν οι $\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi$ και $\cos(t\sqrt{2}) = -1 \Leftrightarrow t\sqrt{2} = 2n\pi + \pi$, οπότε θα έπρεπε να ισχύει $\sqrt{2} = \dfrac{2n+1}{2k}$ κάτι που είναι άτοπο γιατί το αριστερό μέλος είναι άρρητος και το δεξιό είναι ρητός. (Το σώμα φτάνει βέβαια απείρως κοντά στο $x = 0.02$.)

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

(α) Επιλέγοντας πολικές συντεταγμένες με $\hat{\phi}$ ομόρροπο στην αρχική ταχύτητα στο κατώτερο σημείο, όσο το σώμα ανεβαίνει είναι $\vec{v} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ με $\dot{\phi} > 0$ και $\phi > 0$, οπότε η αντίσταση είναι $-\dfrac{1}{2}v^2\,|\tan\phi|\,\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\dfrac{1}{2}v^2 \tan\phi\,\hat{\phi}$. Η επιτάχυνση είναι $\vec{a} = -\dot{\phi}^2\hat{\varpi} + \ddot{\phi}\hat{\phi}$, το βάρος $\cos\phi\,\hat{\varpi} - \sin\phi\,\hat{\phi}$ και η $\hat{\phi}$ συνιστώσα του νόμου Νεύτωνα δίνει $\ddot{\phi} = -\sin\phi - \dfrac{1}{2}v^2\tan\phi$. Θέτοντας $\ddot{\phi} = \dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}\dot{\phi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{d\phi}$ γράφεται $\dfrac{df}{d\phi} + f\tan\phi = -2\sin\phi$.
(β) Σύμφωνα με την υπόδειξη η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι $v^2 = \cos\phi\,\ln(D\cos^2\phi)$.
Για $\phi = 0$ είναι $v = v_0$, οπότε $D = e^{v_0^2}$ και σε κάθε θέση στο ανέβασμα $v = \dot{\phi} = \sqrt{\cos\phi\,\ln(e^{v_0^2}\cos^2\phi)}$.
Το σώμα σταματά όταν $\cos\phi = 0$ ή όταν $e^{v_0^2}\cos^2\phi = 1$. Η μικρότερη λύση είναι η οξεία γωνία $\phi_1 = \arccos e^{-v_0^2/2}$.
Η μηχανική ενέργεια είναι $\dfrac{v^2}{2} - \cos\phi$, όπου $-\cos\phi$ η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους, θεωρώντας επίπεδο αναφοράς στην οριζόντια θέση του νήματος, κάτι που είναι αυθαίρετο. Αρχικά είναι $\dfrac{v_0^2}{2} - 1$, ενώ όταν σταματά πρώτη φορά είναι $0 - \cos\phi_1 = -e^{-v_0^2/2}$, επομένως η απώλεια είναι $\dfrac{v_0^2}{2} - 1 - (-e^{-v_0^2/2}) = \dfrac{v_0^2}{2} - 1 + e^{-v_0^2/2}$.
(γ) Συνδυάζοντας τις $v^2 = \cos\phi\,\ln(e^{v_0^2}\cos^2\phi)$ και $v = \dot{\phi}$ βρίσκουμε $\dfrac{d\phi}{dt} = \sqrt{\cos\phi\,\ln(e^{v_0^2}\cos^2\phi)}$, διαφορική χωριζομένων μεταβλητών που δίνει τον ζητούμενο χρόνο $t_{\text{ανόδου},1} = \displaystyle\int_0^{\phi_1} \dfrac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi\left[\ln\left(\cos^2\phi\right) - \ln\left(\cos^2\phi_1\right)\right]}}$.
(δ) Στο κατέβασμα $\dot{\phi} < 0$ και $\phi > 0$. Όμοια με το ερώτημα (α) βρίσκουμε $\ddot{\phi} = -\sin\phi + \dfrac{1}{2}v^2\tan\phi \Leftrightarrow \dfrac{df}{d\phi} - f\tan\phi = -2\sin\phi$. Σύμφωνα με την υπόδειξη η λύση είναι $v^2 = \dfrac{C + \cos^2\phi}{\cos\phi}$.
Για $\phi = \phi_1$ είναι $v = 0$, οπότε η σταθερά είναι $C = -\cos^2\phi_1 = -e^{-v_0^2}$ και σε κάθε θέση στο κατέβασμα η ταχύτητα είναι $v = \dot{\phi} = -\sqrt{\dfrac{\cos^2\phi - \cos^2\phi_1}{\cos\phi}}$.
Στην κατώτερη θέση $\phi = 0$ η ταχύτητα προκύπτει $v_1 = -\sin\phi_1 = -\sqrt{1 - e^{-v_0^2}}$.
Ο χρόνος καθόδου είναι $t_{\text{καθόδου},1} = \displaystyle\int_{\phi_1}^{0} \dfrac{d\phi}{\dot{\phi}}$ και αντικαθιστώντας $\dot{\phi} = v$, $t_{\text{καθόδου},1} = \displaystyle\int_0^{\phi_1} \sqrt{\dfrac{\cos\phi}{\cos^2\phi - \cos^2\phi_1}}\,d\phi$.
Το επόμενο ανέβασμα-κατέβασμα αντιμετωπίζεται όπως πριν, με αρχική ταχύτητα όμως την v_1, κ.ο.κ. Το $n-$οστό πέρασμα από το κατώτερο σημείο γίνεται με ταχύτητα $v_n = (-1)^n\sqrt{1 - e^{-v_{n-1}^2}}$, $\forall\ n \ge 1$. (Η ακραία θέση πριν το $n-$οστό πέρασμα είναι η $\phi_n = \arcsin(-v_n)$ και οι χρόνοι ανόδου–καθόδου είναι $t_{\text{ανόδου},n} = \displaystyle\int_0^{|\phi_n|} \dfrac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi\left[\ln\left(\cos^2\phi\right) - \ln\left(\cos^2\phi_n\right)\right]}}$ και $t_{\text{καθόδου},n} = \displaystyle\int_0^{|\phi_n|} \sqrt{\dfrac{\cos\phi}{\cos^2\phi - \cos^2\phi_n}}\,d\phi$.)
(ε)