Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 23 Σεπτεμβρίου 2019
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 3ης Δεκεμβρίου 2018: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Σφαίρα μάζας m βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}_0$ από ύψος h, μέσα σε πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$.
(α) Βρείτε την θέση $\vec{r}_{(0)}(t)$ της σφαίρας υποθέτοντας ότι σε αυτή ασκείται μόνο το βάρος της. Σε πόσο χρόνο $\tau_{(0)}$ φτάνει στο έδαφος;
(β) Έστω στην σφαίρα ασκείται επιπλέον μικρή δύναμη αντίστασης $-\lambda m\vec{v}$, όπου $\vec{v}$ η στιγμιαία ταχύτητά της και λ «μικρή» σταθερά. Μελετήστε την κίνηση διαταρακτικά ακολουθώντας τα βήματα:
(β_1) Γράφοντας την θέση σαν $\vec{r} = \vec{r}_{(0)}(t) + \lambda\vec{\xi}(t)$ δείξτε ότι ο νόμος Νεύτωνα δίνει $\ddot{\vec{\xi}} = -\vec{v}_0 - \vec{g}\,t$.
(β_2) Ολοκληρώστε την εξίσωση αυτή, βρείτε την $\vec{\xi}(t)$ και άρα την $\vec{r}(t)$.
★ (β_3) Ο χρόνος πτώσης τ διαφέρει λίγο από τον χρόνο $\tau_{(0)}$, δηλ. είναι $\tau = \tau_{(0)}(1+\lambda\delta)$. Αντικαθιστώντας στην συνθήκη που καθορίζει τον χρόνο πτώσης και κρατώντας όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς λ βρείτε το δ και άρα τον χρόνο τ.
Δίνεται το ανάπτυγμα $(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$ για $|\epsilon| \ll 1$.

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

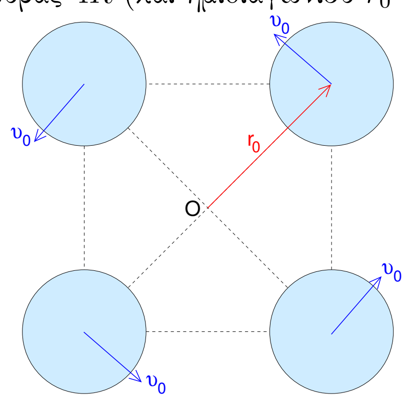
Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση σώματος μάζας $m = 1$, η δύναμη επαναφοράς είναι $-25\vec{r}$, η δύναμη αντίστασης $-6\vec{v}$ και η δύναμη διέγερσης $120\cos(5t)\hat{x}$. Αρχικά (για $t = 0$) το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων.
(α) Αιτιολογήστε γιατί η κίνηση θα είναι γραμμική και βρείτε την θέση σε κάθε χρόνο.
(β) Πως κινείται το σώμα σε μικρούς χρόνους $t \ll 1$; Μπορείτε να απαντήσετε χωρίς να χρησιμοποιήσετε την λύση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα;
(γ) Πως κινείται το σώμα σε «μεγάλους» χρόνους;
(δ) Ποια η μέση ισχύς που προσφέρει ο διεγέρτης σε «μεγάλους» χρόνους;

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Σώμα μάζας $m = 1$ εκτελεί διδιάστατη κίνηση υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -2r^3\hat{r}$ (σε κατάλληλες μονάδες). Οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε το σώμα να κινείται στον δακτύλιο $1 \le r \le 2$.
(α) Βρείτε το δυναμικό, το ενεργό δυναμικό και σχεδιάστε τα γραφήματά τους (στο ίδιο διάγραμμα).
(β) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το ενεργό δυναμικό και τις δεδομένες ακρότατες τιμές της ακτίνας βρείτε την στροφορμή και την ενέργεια του σώματος.
(γ) Ποιο ολοκλήρωμα δίνει την γωνία που έχει σαρώσει η επιβατική ακτίνα όσο το σώμα κινείται από την ακτίνα $r = 1$ στην $r = 2$;
★ (δ) Αν με κάποιο τρόπο το σώμα χάνει ενέργεια αλλά όχι στροφορμή πως θα καταλήξει να κινείται; Αν με κάποιο τρόπο χάνει και ενέργεια και στροφορμή που θα καταλήξει;

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Τα κέντρα τεσσάρων σφαιρικών, ομογενών σωμάτων μάζας m και ακτίνας R τα οποία αλληλεπιδρούν βαρυτικά, βρίσκονται αρχικά στις κορυφές νοητού τετραγώνου πλευράς $4R$ (και ημιδιαγωνίου $r_0 = \sqrt{8}R$).



(α) Έστω αρχικά τα σώματα είναι ακίνητα ($v_0 = 0$).
(α_1) Ποια εξίσωση καθορίζει την απόσταση $r(t)$ του κέντρου κάθε σώματος από το κέντρο μάζας O;
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι η συνολική δύναμη που δέχεται κάθε σώμα από τα άλλα τρία, συναρτήσει της απόστασης $r(t)$ από το O, είναι κεντρική με φορά προς το O και μέτρο $\dfrac{k}{r^2}$ με $k = Gm^2\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
(α_2) Ποια η ταχύτητα των σωμάτων όταν συγκρουστούν;
(α_3) Σε πόσο χρόνο θα συγκρουστούν;
(β) Έστω αρχικά τα σώματα έχουν ταχύτητα $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$ όπως στο σχήμα (δεν υπάρχει ιδιοπεριστροφή).
(β_1) Ποια πρέπει να είναι η v_0 ώστε να μην αλλάζουν οι αποστάσεις μεταξύ των σωμάτων;
★ (β_2) Ποια η ελάχιστη v_0 ώστε τα σώματα να μην συγκρουστούν;

Δίνεται $\displaystyle\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}} = \sqrt{x}\sqrt{1-x} + \arccos\sqrt{x}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1$^\text{ο}$:

(α) Η ολοκλήρωση του νόμου Νεύτωνα δίνει $\ddot{\vec{r}}_{(0)} = \vec{g} \Leftrightarrow \dot{\vec{r}}_{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \Leftrightarrow \vec{r}_{(0)} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$, θεωρώντας αρχή του συστήματος στο σημείο βολής.
Η κατακόρυφη απόσταση γίνεται h όταν $h = g\tau_{(0)}^2/2 \Leftrightarrow \tau_{(0)} = \sqrt{2h/g}$.
(β_1) Ο νόμος Νεύτωνα είναι τώρα $\vec{a} = \vec{g} - \lambda\vec{v}$, όπου $\vec{r} = \vec{r}_{(0)} + \lambda\,\vec{\xi} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2 + \lambda\,\vec{\xi}$, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t + \lambda\,\dot{\vec{\xi}}$, $\vec{a} = \vec{g} + \lambda\,\ddot{\vec{\xi}}$.
Αφού θέλουμε όρους μέχρι ανάλογους του λ, στον όρο αντίστασης θα θέσουμε $\lambda\vec{v} \approx \lambda\vec{v}_{(0)} = \lambda\,(\vec{v}_0 + \vec{g}t)$.
Έτσι βρίσκουμε $\ddot{\vec{\xi}} = -\vec{v}_0 - \vec{g}\,t$.
(β_2) Ολοκληρώνοντας και θέτοντας μηδενικές αρχικές τιμές για την διαταραχή (ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες τις οποίες ήδη ικανοποιεί η αδιατάρακτη λύση), έχουμε $\int_0^t \ddot{\vec{\xi}}\,dt = \int_0^t (-\vec{v}_0 - \vec{g}\,t)\,dt \Leftrightarrow \dot{\vec{\xi}} = -\vec{v}_0 t - \vec{g}\dfrac{t^2}{2}$ και $\int_0^t \dot{\vec{\xi}}\,dt = \int_0^t \left(-\vec{v}_0 t - \vec{g}\dfrac{t^2}{2}\right) dt \Leftrightarrow \vec{\xi} = -\vec{v}_0\dfrac{t^2}{2} - \vec{g}\dfrac{t^3}{6}$.
Άρα η θέση σε κάθε χρόνο είναι $\vec{r} = \vec{r}_{(0)} + \lambda\,\vec{\xi} = \vec{v}_0\left(t - \dfrac{\lambda t^2}{2}\right) + \vec{g}\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{\lambda t^3}{6}\right)$.
(β_3) Η σφαίρα φτάνει στο έδαφος τον χρόνο τ για τον οποίο $h = g\left(\dfrac{\tau^2}{2} - \dfrac{\lambda\tau^3}{6}\right)$.
Θέτοντας $\tau = \tau_{(0)}(1 + \lambda\,\delta)$, οπότε $\tau^2 = \tau_{(0)}^2(1 + \lambda\,\delta)^2 \approx \tau_{(0)}^2\,(1 + 2\lambda\delta)$ και $\lambda\tau^3 \approx \lambda\tau_{(0)}^3$, βρίσκουμε $\delta = \dfrac{\tau_{(0)}}{6}$. Τελικά $\tau \approx \tau_{(0)}\left(1 + \lambda\dfrac{\tau_{(0)}}{6}\right) = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{\lambda h}{3g}$.

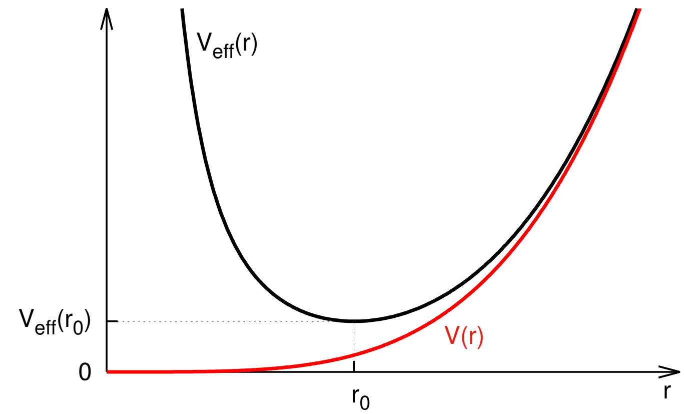
Θέμα 2$^\text{ο}$:

(α) Το αίτιο της κίνησης είναι η δύναμη του διεγέρτη που είναι στην $\hat{x}$ κατεύθυνση. Αφού το σώμα είναι αρχικά ακίνητο θα αρχίσει να κινείται στον άξονα x. Καθώς κινείται όλες οι δυνάμεις έχουν την διεύθυνση του άξονα x, επομένως η κίνηση παραμένει πάντα πάνω σε αυτόν τον άξονα.
$\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 120\cos(5t)$.
Μερική λύση $x_{\mu\varepsilon\rho} = A\cos(5t) + B\sin(5t)$. Αντικαθιστώντας προκύπτει $30B\cos(5t) - 30A\sin(5) = 120\cos(5t)$, άρα $A = 0$, $B = 4$ και $x_{\mu\varepsilon\rho} = 4\sin(5t)$.
Η λύση της ομογενούς είναι της μορφής $e^{\lambda t}$ με την αντικατάσταση να δίνει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = -3 \pm 4i$. Άρα η γενική λύση της ομογενούς είναι $x_{\text{ομ}} = e^{-3t}\left[C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)\right]$ και η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης
$x = e^{-3t}\left[C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)\right] + 4\sin(5t)$.
Η ταχύτητα είναι $\dot{x} = -3e^{-3t}[C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)] + 4e^{-3t}\left[-C_1\sin(4t) + C_2\cos(4t)\right] + 20\cos(5t)$.
Λόγω της αρχικής συνθήκης $x|_{t=0} = 0$ είναι $C_1 = 0$ και λόγω της αρχικής συνθήκης $\dot{x}|_{t=0} = 0$ είναι $C_2 = -5$.
Επομένως η λύση είναι
$x = -5e^{-3t}\sin(4t) + 4\sin(5t)$,
$\dot{x} = 15e^{-3t}\sin(4t) - 20e^{-3t}\cos(4t) + 20\cos(5t)$.
(β) Αφού αρχικά θέση και ταχύτητα είναι μηδέν, θα είναι $x \approx \dfrac{1}{2}\ddot{x}|_{t=0}t^2$. Από τον νόμο Νεύτωνα $\ddot{x}|_{t=0} = \left[-6\dot{x} - 25x + 120\cos(5t)\right]_{t=0} = 120$, άρα $x \approx 60t^2$.
Πράγματι το ανάπτυγμα Taylor της λύσης για $t \ll 1$, με $\sin(4t) = 4t + \mathcal{O}(t^3)$, $\sin(5t) = 5t + \mathcal{O}(t^3)$, $e^{-3t} = 1 - 3t + \mathcal{O}(t^2)$ δίνει $x = -5(1-3t) \times 4t + 4 \times 5t + \mathcal{O}(t^3) = 60t^2 + \mathcal{O}(t^3)$.
(γ) Σε «μεγάλους» χρόνους, δηλ. πρακτικά για $3t > 5$, το μέρος που φθίνει εκθετικά είναι αμελητέο και άρα $x \approx 4\sin(5t)$.
(δ) Η ισχύς του διεγέρτη είναι δύναμη επί ταχύτητα, δηλ. $P = 120\cos(5t)\dfrac{d}{dt}\left[4\sin(5t)\right] = 2400\cos^2(5t)$.
Η μέση τιμή είναι $\langle P\rangle = 1200$ (αφού η μέση τιμή του $\cos^2(5t)$ είναι $1/2$).

Θέμα 3$^\text{ο}$:

(α) Το δυναμικό είναι $V(r) = -\displaystyle\int F dr = -\int(-2r^3)dr = \dfrac{r^4}{2}$ (μηδενίζοντας την αυθαίρετη προσθετική σταθερά) και το ενεργό δυναμικό είναι $V_\text{eff}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \dfrac{L^2}{2r^2} + \dfrac{r^4}{2}$.
$\dfrac{dV_\text{eff}}{dr} = \dfrac{2}{r^3}\left(r^6 - \dfrac{L^2}{2}\right)$, αρνητική στο $r \in (0, r_0)$ και θετική στο $r \in (r_0, \infty)$, όπου $r_0 = (L^2/2)^{1/6}$. Άρα το ενεργό δυναμικό φθίνει στο διάστημα $(0, r_0)$ από $+\infty$ σε $V_\text{eff}(r_0)$ και στη συνέχεια αυξάνει μέχρι το $+\infty$ για $r \to \infty$.
Το δυναμικό είναι $V = \dfrac{1}{2}r^4$, αύξουσα, ξεκινά από $V(0) = 0$ στο κέντρο και απειρίζεται για $r \to \infty$.
(Σε κάθε θέση είναι $V_\text{eff}(r) > V(r)$. Σε μεγάλες αποστάσεις τα δύο γραφήματα ταυτίζονται, αφού η

διαφορά τους $L^2/2r^2$ μηδενίζεται.)



(β) Στα άκρα της ακτινικής κίνησης $r=1$ και $r=2$ είναι $V_{\rm eff}=E$, οπότε έχουμε $V_{\rm eff}(r_1)=V_{\rm eff}(r_2)=E$. Η πρώτη ισότητα δίνει $\dfrac{L^2}{2r_1^2}+\dfrac{r_1^4}{2}=\dfrac{L^2}{2r_2^2}+\dfrac{r_2^4}{2}\Leftrightarrow$ $\dfrac{L^2}{r_1^2r_2^2}(r_2^2-r_1^2)=r_2^4-r_1^4\Leftrightarrow L=r_1r_2\sqrt{r_1^2+r_2^2}$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να διαλέξουμε το σύστημα αναφοράς ώστε $L>0$, δηλ. η γωνία ϕ να αυξάνεται με τον χρόνο).

Για $r_1=1$, $r_2=2$ προκύπτει $L=\sqrt{20}$.

Η ενέργεια είναι $E=V_{\rm eff}(r_1)=\dfrac{20}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{21}{2}$.

(γ) Από το ολοκλήρωμα ενέργειας $\dfrac{\dot r^2}{2}+\dfrac{20}{2r^2}+\dfrac{r^4}{2}=\dfrac{21}{2}\Leftrightarrow \dot r=\sqrt{21-r^4-20/r^2}$ (στην συγκεκριμένη κίνηση είναι $\dot r>0$) και από το ολοκλήρωμα στροφορμής $\dot\phi=\dfrac{L}{mr^2}=\dfrac{\sqrt{20}}{r^2}$.

Η γωνία που σαρώνει η επιβατική ακτίνα είναι $\Delta\phi=\displaystyle\int_1^2\frac{d\phi}{dr}dr=\int_1^2\frac{\dot\phi}{\dot r}dr=\int_1^2\frac{\sqrt{20}\,dr}{r^2\sqrt{21-r^4-20/r^2}}$.

(δ) Αν χάνει ενέργεια αλλά όχι στροφορμή θα χάσει την ακτινική κίνηση και θα καταλήξει στην κυκλική τροχιά για $L=\sqrt{20}$, η οποία είναι το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού. Δηλ. θα κινείται κυκλικά στην ακτίνα $r_0=10^{1/6}$ με ταχύτητα $\dfrac{L}{r_0}=10^{1/3}\sqrt{2}$.

Αν χάνει και ενέργεια και στροφορμή θα καταλήξει ακίνητο στο σημείο ισορροπίας που είναι το κέντρο $r=0$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Λόγω συμμετρίας τα κέντρα των τεσσάρων σωμάτων βρίσκονται πάντα σε κορυφές τετραγώνου πλευράς $\beta=r\sqrt{2}$, όπου r η απόσταση του κέντρου κάθε σώματος από το κέντρο μάζας Ο.

Κάθε ένα από τα σώματα δέχεται τρεις βαρυτικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα με φορά προς το καθένα και μέτρα $\dfrac{Gm^2}{(2r)^2}$ από το απέναντι και $\dfrac{Gm^2}{\beta^2}$ από τα διπλανά. Η συνισταμένη είναι κεντρική δύναμη με φορά προς το Ο και μέτρο $F=\dfrac{Gm^2}{(2r)^2}+2\dfrac{Gm^2}{\beta^2}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{k}{r^2}$, με $k=Gm^2\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(α_1) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη και ο νόμος Νεύτωνα (για το κέντρο μάζας του εκάστοτε σώματος που βρίσκεται στο κέντρο του) δίνει $m\ddot r=-\dfrac{k}{r^2}$.

(α_2) Το ισοδύναμο ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\dfrac{mv^2}{2}-\dfrac{k}{r}=E$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες προκύπτει $E=-\dfrac{k}{r_0}$ όπου $r_0^2+r_0^2=(4R)^2\Leftrightarrow r_0=\sqrt{8}R$, οπότε η ταχύτητα σε κάθε θέση έχει μέτρο $v=\sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση ενέργειας του συνολικού συστήματος. Αρχικά η κινητική ενέργεια είναι μηδενική και η δυναμική ενέργεια είναι $V_{12}+V_{13}+V_{14}+V_{23}+V_{24}+V_{34}=-\dfrac{Gm^2}{R}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{4k}{r_0}$. Σε μια τυχαία θέση η κινητική ενέργεια είναι $4\dfrac{mv^2}{2}$ και η δυναμική ενέργεια είναι $-\dfrac{4k}{r}$. Η ταχύτητα σε κάθε θέση προκύπτει από την διατήρηση ενέργειας $0-\dfrac{4k}{r_0}=4\dfrac{mv^2}{2}-2\dfrac{4k}{r}\Leftrightarrow v=\sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)}$.

Όταν τα σώματα έρθουν σε επαφή η πλευρά του τετραγώνου είναι $\beta=2R$, οπότε όλες οι αποστάσεις υποδιπλασιάζονται. Άρα $r=\dfrac{r_0}{2}$ και η ταχύτητα έχει μέτρο $v=\sqrt{\dfrac{2k}{mr_0}}$ και φορά προς το Ο.

(α_3) $t=\displaystyle\int\frac{dr}{\dot r}=\int_{r_0}^{r_0/2}\frac{dr}{-\sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_0}\right)}}$. Θέτοντας $r=r_0x$ προκύπτει $t=\sqrt{\dfrac{mr_0^3}{2k}}\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}$ και χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα $t=\sqrt{\dfrac{mr_0^3}{2k}}\dfrac{2+\pi}{4}$.

(β_1) Πρέπει οι κινήσεις να είναι κυκλικές, οπότε $\dfrac{mv_0^2}{r_0}=F=\dfrac{k}{r_0^2}\Leftrightarrow v_0=\sqrt{\dfrac{k}{mr_0}}$.

(β_2) Οριακά η κίνηση των σωμάτων είναι ελλειπτι-

κή με απόκεντρο την αρχική θέση όπου $r_\alpha = r_0$, $v_\alpha = v_0$ και περίκεντρο την θέση επαφής όπου $r_\pi = \sqrt{2}R = r_0/2$. Συνδυασμός των διατηρήσεων ενέργειας $\dfrac{mv_\alpha^2}{2} - \dfrac{k}{r_\alpha} = \dfrac{mv_\pi^2}{2} - \dfrac{k}{r_\pi}$ και στροφορμής $mv_\alpha r_\alpha = mv_\pi r_\pi$ δίνουν $v_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{3mr_0}}$.
Το ίδιο προκύπτει μέσω της μελέτης του ενεργού δυναμικού $V_{\text{eff}}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} - \dfrac{k}{r}$, όπου $L = mv_0 r_0$. Τα όρια της ακτινικής κίνησης είναι r_0 και $r_\pi = r_0/2$, οπότε $V_{\text{eff}}(r_0) = V_{\text{eff}}(r_\pi) \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{3mr_0}}$.
Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την διατήρηση ενέργειας και στροφορμής του συνολικού συστήματος ως προς το κέντρο μάζας. Αρχικά η στροφορμή είναι $4mr_0v_0$, η κινητική ενέργεια $4\dfrac{mv_0^2}{2}$ και η δυναμική ενέργεια $V_{12}+V_{13}+V_{14}+V_{23}+V_{24}+V_{34} = -\dfrac{4k}{r_0}$. Τελικά, στην οριακή περίπτωση που μόλις ακουμπούν τα σώματα, όλες οι αποστάσεις υποδιπλασιάζονται και η ταχύτητα v_π είναι ξανά κάθετη στην ακτίνα από το κέντρο. Άρα η διατήρηση στροφορμής δίνει $v_\pi = 2v_0$ και η δυναμική ενέργεια είναι διπλάσια της αρχικής. Η διατήρηση ενέργειας δίνει $4\dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{4k}{r_0} = 4\dfrac{m(2v_0)^2}{2} - 2\dfrac{4k}{r_0} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{3mr_0}}$.