Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 9 Μαΐου 2019
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

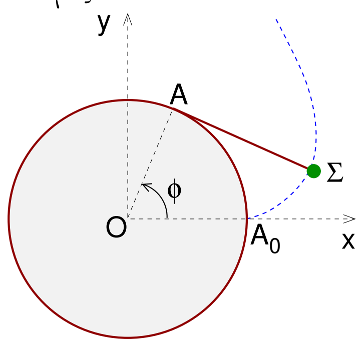
Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 3ης Δεκεμβρίου 2018: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1ο:

Αβαρές, μη-εκτατό νήμα είναι τυλιγμένο σε ένα σταθερό κατακόρυφο πάσσαλο ακτίνας R. Στο άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα Σ το οποίο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η κάτοψη φαίνεται στο σχήμα.



Αρχικά το σώμα βρίσκεται στο σημείο A_0 όπου $\phi = 0$ και έχει ταχύτητα $v_0\hat{x}$. Σε μια τυχαία μεταγενέστερη στιγμή έχει ξετυλιχθεί μήκος νήματος ΑΣ$= R\phi$.

(α) Αιτιολογήστε γιατί η τροχιά του Σ, η οποία λέγεται «ενειλιγμένη κύκλου», έχει παραμετρική γραφή $x = R(\cos\phi + \phi\sin\phi)$, $y = R(\sin\phi - \phi\cos\phi)$.

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα του Σ είναι παράλληλη στην ΟΑ, δηλ. κάθετη στο νήμα.

(γ) Αιτιολογήστε γιατί διατηρείται το μέτρο της ταχύτητας, δηλ. $|\vec{v}| = v_0$. Μέσω της σχέσης αυτής βρείτε την γωνία ϕ σαν συνάρτηση του χρόνου.

(δ) Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος και τις κεντρομόλο–επιτρόχια συνιστώσες της.

(ε) Ποια η ακτίνα καμπυλότητας και ποιο το μήκος της ενειλιγμένης κύκλου συναρτήσει του ϕ;

Θέμα 2ο:

Σ' ένα ιδιαίτερο ελατήριο η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της τρίτης δύναμης της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας, δηλ. $F = -kx^3$.

(α) Αν σώμα m, δεμένο στο ελατήριο αυτό, εκτελεί γραμμική ταλάντωση πλάτους x_0, εκτιμήστε διαστατικά την περίοδο της κίνησης.

(β) Βρείτε την ακριβή σχέση που δίνει την περίοδο για δεδομένα k, m και x_0.

★ (γ) Η περίοδος μπορεί να ιδωθεί σαν εμβαδόν σε διάγραμμα με κατάλληλους άξονες (παραλλαγή του φασικού). Ποιο είναι αυτό; Σχεδιάστε το πρόχειρα για την ταλάντωση πλάτους x_0.

(δ) Έστω στο σώμα, εκτός της δύναμης επαναφοράς, ασκείται και αντίσταση μέτρου $bmv^2/2$ (όπου b σταθερά). Αν κάποια στιγμή το σώμα βρίσκεται ακίνητο στο σημείο $x = -1/b$ βρείτε την ταχύτητα συναρτήσει της θέσης μέχρι να ξανασταματήσει.

Υπόδειξη: Βρείτε την διαφορική εξίσωση που δίνει την $v^2 = f(x)$, η οποία θα προκύψει να έχει μορφή $\dfrac{df(x)}{dx} + c(x)f(x) = d(x)$ και μπορεί να απλοποιηθεί θέτοντας $f(x) = h(x)\,e^{-\int c(x)\,dx}$.

Δίνονται τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} = 1.311$ και

$$\int \xi^3 e^{\xi} d\xi = \left(\xi^3 - 3\xi^2 + 6\xi - 6\right) e^{\xi} + \text{ σταθερά.}$$

Θέμα 3ο:

Η τροχιά ενός φωτονίου γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild μάζας M, όπως περιγράφεται από την Γενική Θεωρία Σχετικότητας, είναι ίδια με την Νευτώνεια τροχιά σώματος μοναδιαίας μάζας σε κεντρικό δυναμικό $V(r) = -\dfrac{L^2 r_g}{r^3}$, όπου $r_g = \dfrac{GM}{c^2}$ και $L = r^2\dot{\phi}$ η στροφορμή.

(α) Βρείτε το ενεργό δυναμικό $V_{\rm eff}(r)$ και σχεδιάστε το γράφημά του.

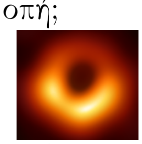
(β) Υπάρχουν κυκλικές τροχιές; Είναι ευσταθείς;

(γ) Η τροχιά ενός φωτονίου ξεκινά από το άπειρο με παράμετρο κρούσης b.

(γ_1) Δείξτε ότι για ένα τέτοιο φωτόνιο ενέργειας E ισχύει $L^2 = 2Eb^2$.

(γ_2) Πόση πρέπει να είναι τουλάχιστον η τιμή της b ώστε η τροχιά να μην πέσει στην μελανή οπή;

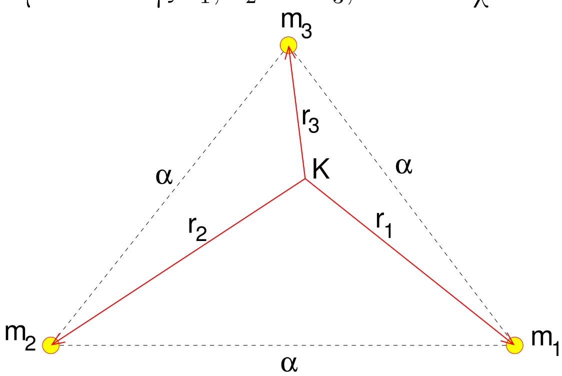
Αυτή είναι η ακτίνα της σκιάς της μελανής οπής που πρόσφατα παρατηρήθηκε από το Event Horizon Telescope.



★ (γ_3) Ποια εξίσωση δίνει την ελάχιστη απόσταση που φτάνει το φωτόνιο ($r_{\min}$) και ποιο ολοκλήρωμα δίνει την γωνία εκτροπής του φωτονίου καθώς κινείται από το άπειρο μέχρι την ελάχιστη απόσταση $r_{\min}$ και ξανά προς το άπειρο;

Θέμα 4ο:

Ένα απομονωμένο αστρικό σύστημα αποτελείται από τρεις αστέρες με μάζες m_1, m_2 και m_3 που βρίσκονται στις κορυφές νοητού ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α και αλληλεπιδρούν βαρυτικά. Στο σύστημα του κέντρου μάζας τους Κ οι αστέρες έχουν διανύσματα θέσης $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ και $\vec{r}_3$, αντίστοιχα.



Το αστρικό σύστημα περιστρέφεται γύρω από το Κ με κατάλληλη γωνιακή ταχύτητα ω ώστε οι αποστάσεις μεταξύ των αστέρων να παραμένουν σταθερές.

(α) Δείξτε ότι η συνολική δύναμη στον αστέρα m_3 είναι $\vec{F}_3 = -\dfrac{GMm_3}{\alpha^3}\vec{r}_3$ όπου $M = m_1 + m_2 + m_3$ η συνολική μάζα του συστήματος.

(β) Προσδιορίστε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω.

★ (γ) Δείξτε ότι η ολική ενέργεια του συστήματος στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι το μισό της δυναμικής, δηλ. $-\dfrac{G(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3)}{2\alpha}$.

ΛΥΣΕΙΣ:

Θέμα 1ο:

(α) ΟΣ=ΟΑ+ΑΣ. Το διάνυσμα ΟΑ είναι $R\cos\phi\hat{x}+R\sin\phi\hat{y}$. Το διάνυσμα ΑΣ έχει μήκος $R\phi$ και σχηματίζει γωνία ϕ με τον $-\hat{y}$ άξονα. Προβάλλοντάς το στους άξονες είναι $R\phi\sin\phi - R\phi\cos\phi$. Το άθροισμα των δύο είναι το διάνυσμα θέσης του Σ $\vec{r} = R(\cos\phi+\phi\sin\phi)\hat{x} + R(\sin\phi-\phi\cos\phi)\hat{y}$.
Το ίδιο προκύπτει χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες του Α. Το ΟΑ γράφεται $R\hat{\varpi}_A$, το ΑΣ γράφεται $-R\phi\hat{\phi}_A$, άρα $\vec{r} = R\hat{\varpi}_A - R\phi\hat{\phi}_A$.
(β) $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R\phi\dot{\phi}\,(\cos\phi\hat{x}+\sin\phi\hat{y})$.
Είναι πράγματι παράλληλη στο ΟΑ το οποίο αναφέρθηκε πριν ότι είναι $R\cos\phi\hat{x}+R\sin\phi\hat{y}$.
(γ) Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος, η αντίδραση από το επίπεδο και η τάση του νήματος. Όλες είναι κάθετες στην κίνηση και δεν παράγουν έργο. Άρα το μέτρο της ταχύτητας μένει σταθερό.
$|\vec{v}| = v_0 \Leftrightarrow R\phi\dot{\phi} = v_0$ (είναι $|\dot{\phi}| = \dot{\phi}$ αφού η γωνία αυξάνεται με το χρόνο). Ολοκληρώνοντας $\int_0^{\phi} R\phi d\phi = \int_0^t v_0 dt \Leftrightarrow \frac{R\phi^2}{2} = v_0 t \Leftrightarrow \phi = \sqrt{\frac{2v_0t}{R}}$.
(δ) Η ταχύτητα είναι $\vec{v} = v_0\,(\cos\phi\hat{x}+\sin\phi\hat{y})$ με $\phi = \sqrt{2v_0t/R}$, επομένως η επιτάχυνση είναι $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = v_0\dot{\phi}\,(-\sin\phi\hat{x}+\cos\phi\hat{y})$, όπου $\dot{\phi} = \frac{v_0}{R\phi} = \sqrt{\frac{v_0}{2Rt}}$.
Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι $\vec{a}_\varepsilon = 0$, αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό. (Αυτό προκύπτει και από τον νόμο Νεύτωνα, αφού όλες οι δυνάμεις είναι κάθετες στην κίνηση.) Η κεντρομόλος είναι $\vec{a}_\kappa = \vec{a}$.
(ε) Από την σχέση $a_\kappa = \frac{v^2}{\mathcal{R}}$ με $|a_\kappa| = v_0\dot{\phi} = \frac{v_0^2}{R\phi}$ και $v = v_0$ βρίσκουμε $\mathcal{R} = R\phi$.
Το κέντρο καμπυλότητας είναι το σημείο Α.
Το μήκος είναι $s = v_0t$ (αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό). Η σχέση χρόνου–γωνίας είναι $\phi = \sqrt{2v_0t/R}$ άρα $s = R\phi^2/2$.

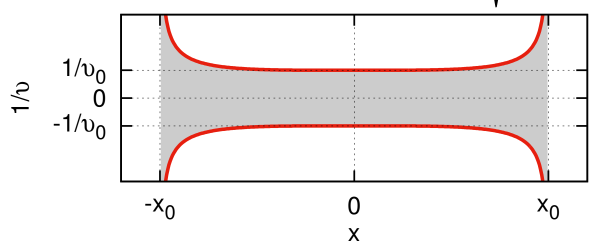
Θέμα 2ο:

(α) Εξαρτάται από την μάζα, την σταθερά k και το πλάτος x_0, δηλ. $T \propto m^\alpha k^\beta x_0^\gamma$. Οι μονάδες του k είναι δύναμη ανά μήκος εις την τρίτη, δηλ. $[k] = \frac{[M][L]/[T]^2}{[L]^3} = [M][L]^{-2}[T]^{-2}$. Άρα η σχέση $T \propto m^\alpha k^\beta x_0^\gamma$ δίνει $[T] = [M]^\alpha\left([M][L]^{-2}[T]^{-2}\right)^\beta [L]^\gamma \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = -2\beta+\gamma \text{ (από μήκη)}\,, \\ 0 = \alpha+\beta \text{ (από μάζες)}\,, \\ 1 = -2\beta \text{ (από χρόνους)}\,, \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1/2\,, \\ \beta = -1/2\,, \\ \gamma = -1\,. \end{array}\right.$$

Άρα $T \propto \sqrt{\frac{m}{kx_0^2}}$.

(β) $\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = E$, $V(x) = -\int(-kx^3)dx = \frac{kx^4}{4}$ (μπορούμε να θεωρήσουμε μηδενική την προσθετική σταθερά ολοκλήρωσης). Τα όρια είναι $\pm x_0$ επομένως $E = \frac{kx_0^4}{4}$ και άρα $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{kx_0^4}{4} - \frac{kx^4}{4}\right)}$.
Χρησιμοποιώντας την $dt = \frac{dx}{\dot{x}}$ η περίοδος είναι $T = 4\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{kx_0^4}{4}-\frac{kx^4}{4}\right)}}$. Θέτοντας $x = x_0\xi$,
$T = 4\sqrt{\frac{2m}{kx_0^2}}\int_0^1\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} = 7.416\sqrt{\frac{m}{kx_0^2}}$.
(γ) Λόγω της $dt = \frac{1}{v}dx$ η περίοδος είναι το εμβαδόν στο διάγραμμα της συνάρτησης $\frac{1}{v} = \pm\sqrt{\frac{m/2}{E-V(x)}}$.

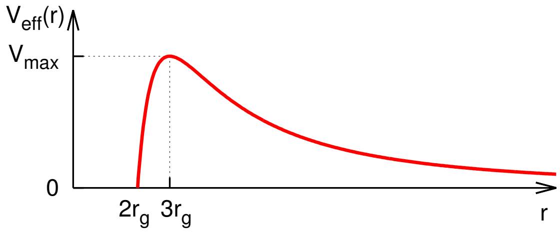


(δ) Η συγκεκριμένη κίνηση γίνεται προς μεγαλύτερα x οπότε η αντίσταση είναι $-(bmv^2/2)\hat{x}$ και ο νόμος Νεύτωνα $m\ddot{x} = -bmv^2/2 - kx^3$. Με $\ddot{x} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}$ είναι $\frac{dv^2}{dx} + bv^2 = -\frac{2k}{m}x^3$. Με $v^2 = he^{-\int b\,dx} = he^{-bx}$ είναι $\frac{dh}{dx} = -\frac{2k}{m}x^3e^{bx}$, δηλ. $h = -\frac{2k}{m}\int x^3e^{bx}dx = -\frac{2k}{mb^4}\int^{bx}\xi^3e^{\xi}d\xi = -\frac{2k}{mb^4}\left[\left(b^3x^3-3b^2x^2+6bx-6\right)e^{bx} - C\right]$. Άρα $v^2 = \frac{2k}{mb^4}\left(-b^3x^3+3b^2x^2-6bx+6+Ce^{-bx}\right)$.
Από αρχικές συνθήκες ($v = 0$ για $x = -1/b$) βρίσκουμε την σταθερά $C = -\frac{16}{e}$. Η ταχύτητα είναι $v^2 = \frac{2k}{mb^4}\left(-b^3x^3+3b^2x^2-6bx+6-16e^{-bx-1}\right)$.

Θέμα 3ο:

(α) $V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2r_g}{r^3}$, $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{L^2}{r^4}(3r_g - r)$.
Άρα το ενεργό δυναμικό αυξάνεται στην περιοχή $r < 3r_g$, μειώνεται στην περιοχή $r > 3r_g$ και έχει μέγιστο στην ακτίνα $r = 3r_g$ ίσο με $V_{\max} = \frac{L^2}{54r_g^2}$.

Μηδενίζεται για $r=2r_g$ και σε μεγάλες αποστάσεις.



(β) Κυκλική τροχιά στην ακτίνα $r=3r_g$ όπου το $V_{\rm eff}$ είναι ακρότατο. Η ακτίνα αυτή αντιστοιχεί σε μέγιστο οπότε είναι ασταθής.

(γ_1) Σε μεγάλες αποστάσεις $E=v_\infty^2/2$ και $L=|\vec r\times\vec v|=r_\perp v_\infty=bv_\infty$, οπότε $L^2=2Eb^2$.

(γ_2) Πρέπει $E<V_{\rm max}\Leftrightarrow E<\dfrac{L^2}{54r_g^2}$. Αντικαθιστώντας $L^2=2Eb^2$ προκύπτει $b>\sqrt{27}r_g\approx 5.2r_g$.

(γ_3) Το ολοκλήρωμα ενέργειας $E=\dfrac{\dot r^2}{2}+\dfrac{L^2}{2r^2}-\dfrac{L^2r_g}{r^3}$ με $L^2=2Eb^2$ δίνει $\dot r=\pm L\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{2r_g}{r^3}}$. Επομένως η ελάχιστη ακτίνα δίνεται από την εξίσωση $\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{r_{\rm min}^2}+\dfrac{2r_g}{r_{\rm min}^3}=0$.

Ισοδύναμα $r_{\rm min}^3-b^2r_{\rm min}+2b^2r_g=0$. Η λύση στην περιοχή $r>3r_g$, δηλ. μετά το μέγιστο του $V_{\rm eff}$, είναι η $r_{\rm min}=\dfrac{2b}{\sqrt3}\cos\left[\dfrac13\arccos\left(-\sqrt{27}\dfrac{r_g}{b}\right)\right]$.

Όσο το φωτόνιο κινείται από $r=\infty$ ως $r_{\rm min}$ είναι $\dot r=-L\sqrt{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{2r_g}{r^3}}$ και $d\phi=\dfrac{\dot\phi}{\dot r}dr=\dfrac{L/r^2}{\dot r}dr$. Άρα η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα είναι $\Delta\phi=\displaystyle\int_\infty^{r_{\rm min}}\frac{(1/r^2)dr}{-\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{2r_g}{r^3}}}$. Με αλλαγή μεταβλητής $r=\dfrac{r_g}{\xi}$ γράφεται $\Delta\phi=\displaystyle\int_0^{r_g/r_{\rm min}}\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{r_g^2}{b^2}-\xi^2+2\xi^3}}$.

Η γωνία εκτροπής είναι $2\Delta\phi-\pi$.

Θέμα 4$^{\rm o}$:

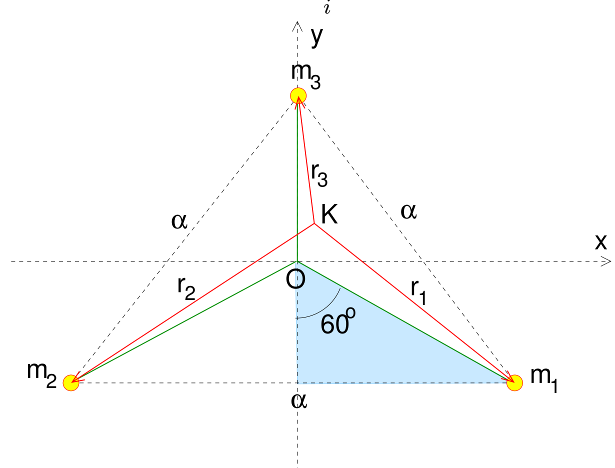
(α) $\vec F_3=-\dfrac{Gm_3m_1(\vec r_3-\vec r_1)}{|\vec r_3-\vec r_1|^3}-\dfrac{Gm_3m_2(\vec r_3-\vec r_2)}{|\vec r_3-\vec r_2|^3}$. Όμως οι αποστάσεις $|\vec r_3-\vec r_1|=|\vec r_3-\vec r_2|=\alpha$, οπότε $\vec F_3=-\dfrac{Gm_3}{\alpha^3}(m_1\vec r_3-m_1\vec r_1+m_2\vec r_3-m_2\vec r_2)$. Αντικαθιστώντας $-m_1\vec r_1-m_2\vec r_2=m_3\vec r_3$, η οποία ισχύει γιατί στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι $m_1\vec r_1+m_2\vec r_2+m_3\vec r_3=0$, βρίσκουμε την ζητούμενη.

(β) Για να περιστρέφεται το σύστημα σαν στερεό σώμα γύρω από το κέντρο μάζας του, πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε σώμα να ισούται με την κεντρομόλο. Για το m_3 δηλαδή (και όμοια για τους άλλους δύο αστέρες) πρέπει $\vec F_3=-m_3\omega^2\vec r_3\Rightarrow$ $\omega=\sqrt{\dfrac{GM}{\alpha^3}}$ (η διεύθυνση της $\vec\omega$ είναι κάθετη στο επίπεδο των αστέρων).

(γ) Σύμφωνα με το θεώρημα Virial ισχύει $\dfrac12\dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\sum_{i=1}^3 m_i\vec r_i^{\,2}=2T+V$. Το αριστερό μέρος είναι μηδενικό, οπότε $T=-\dfrac12V$ και $E=T+V=\dfrac12V$.

Μία άμεση απόδειξη ακολουθεί:

Η κινητική ενέργεια είναι $\displaystyle\sum_i\frac{m_ir_i^2\omega^2}{2}$ με $\omega^2=\dfrac{GM}{\alpha^3}$.



Μπορούμε να βρούμε αποστάσεις στο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος που είναι σταθερό ως προς το τρίγωνο και με αρχή το κέντρο του τριγώνου O (παρότι αυτό δεν είναι αδρανειακό). Στο σύστημα αυτό εύκολα βρίσκουμε (π.χ. με τριγωνομετρία στο σκιασμένο τρίγωνο) ότι οι θέσεις των μαζών είναι $\vec R_1=\left(\dfrac{\alpha}{2},-\dfrac{\alpha}{2\sqrt3}\right)$, $\vec R_2=\left(-\dfrac{\alpha}{2},-\dfrac{\alpha}{2\sqrt3}\right)$, $\vec R_3=\left(0,\dfrac{\alpha}{\sqrt3}\right)$, οπότε το κέντρο μάζας βρίσκεται στο σημείο K με $\overrightarrow{\rm OK}=\dfrac{m_1\vec R_1+m_2\vec R_2+m_3\vec R_3}{M}=\dfrac{\alpha}{M}\left(\dfrac{m_1-m_2}{2},\dfrac{2m_3-m_1-m_2}{2\sqrt3}\right)$. Έτσι βρίσκουμε $\vec r_1=\vec R_1-\overrightarrow{\rm OK}=\dfrac{\alpha}{M}\left(\dfrac{2m_2+m_3}{2},-\dfrac{m_3\sqrt3}{2}\right)$ και $r_1=\dfrac{\alpha}{M}\sqrt{m_2^2+m_3^2+m_2m_3}$. Όμοια βρίσκουμε $r_2=\dfrac{\alpha}{M}\sqrt{m_1^2+m_3^2+m_1m_3}$ και $r_3=\dfrac{\alpha}{M}\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_1m_2}$. Έτσι $\displaystyle\sum_i m_ir_i^2=\frac{\alpha^2}{M}(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)$, δηλ. η κινητική ενέργεια είναι $T=\dfrac{G(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}{2\alpha}=-\dfrac12V$, όπου $V=-\dfrac{G(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}{\alpha}$ η δυναμική ενέργεια. Η ολική ενέργεια είναι $E=T+V=\dfrac12V$.