Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις στη Μηχανική Ι, Τμήμα Α (Ν. Βλαχάκη), 22 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία (★ = bonus ερωτήματα)

Ονοματεπώνυμο: ______________________________, ΑΜ: ______________

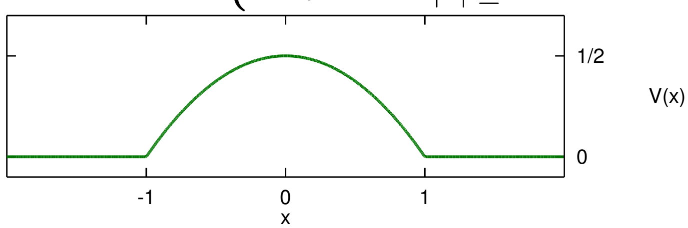
Να ληφθεί υπόψη η πρόοδος της 3ης Δεκεμβρίου 2018: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐ — **αν ΝΑΙ μην απαντήσετε τα θέματα 1 και 2**

Έχω παραδώσει εργασίες: ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ ☐

Θέμα 1^o:

Σώμα μάζας $m = 1$ έχει ταχύτητα v_0 στο $x = -\infty$ και πλησιάζει το φράγμα δυναμικού του σχήματος, το οποίο έχει παραβολικό σχήμα

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{2} & \text{αν } |x| \leq 1\,, \\ 0 & \text{αν } |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

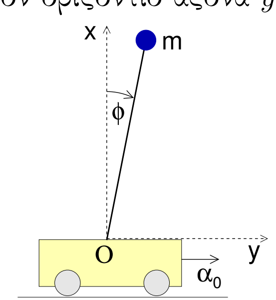


(α) Περιγράψτε την κίνηση του σώματος για διάφορες τιμές της v_0.
(β) Αν το σώμα φτάνει στο $x = +\infty$, βρείτε την χρονική καθυστέρηση της κίνησης σε σχέση με την ελεύθερη κίνηση χωρίς δύναμη.
★ (γ) Σχολιάστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος στο όριο μεγάλων και μικρών (δηλ. οριακά μεγαλύτερων της ταχύτητας που απαιτείται για να ξεπεραστεί το φράγμα) ταχυτήτων.
(δ) Σχεδιάστε προσεκτικά το φασικό διάγραμμα για τις κινήσεις στο παραπάνω δυναμικό.

Δίνεται $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \ln\left|\sqrt{x^2+c}+x\right| + \text{σταθερά}.$

Θέμα 2^o:

Η βάση λειτουργίας του Segway είναι το ανάστροφο εκκρεμές. Στην απλοϊκή έκδοσή του το εκκρεμές αποτελείται από σημειακό σώμα μάζας m στο άκρο αβαρούς ράβδου, το άλλο άκρο της οποίας Ο μπορεί να κινείται οριζόντια, καθοδηγούμενο από ένα μηχανισμό που δίνει κίνηση στο αμαξίδιο. Όπως δείχνει το σχήμα, το εκκρεμές κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο xy και το Ο στον οριζόντιο άξονα y.



Το ερώτημα είναι τι σύστημα αυτόματου ελέγχου (ΣΑΕ) πρέπει να έχει ο μηχανισμός, δηλαδή πως πρέπει να αποκρίνεται η κίνηση του αμαξιδίου στις αποκλίσεις του εκκρεμούς από την κατακόρυφο, ώστε αυτές να αποσβένονται και το σώμα να επιστρέφει σε ισορροπία στην κατακόρυφη θέση $\phi = 0$.
(α) Βρείτε την εξίσωση κίνησης για την γωνία ϕ, για δεδομένη επιτάχυνση του αμαξιδίου a_0, και δείξτε ότι για μικρές γωνίες γίνεται $\ddot{\phi} = \dfrac{g}{R}\phi - \dfrac{a_0}{R}$ (g είναι η επιτάχυνση βαρύτητας και R το μήκος της ράβδου).
(β) Έστω το ΣΑΕ δίνει επιτάχυνση ανάλογη της μετατόπισης, $a_0 = k_P R\phi$ με σταθερά k_P. Δείξτε ότι, παρότι υπάρχουν τιμές της k_P για τις οποίες η κατακόρυφη θέση παύει να είναι ασταθής, το σύστημα έχει μη-επιθυμητή (ταλαντωτική) συμπεριφορά.
(γ) Έστω το ΣΑΕ δίνει επιτάχυνση ανάλογη της ταχύτητας του σώματος, $a_0 = k_D R\dot{\phi}$ με σταθερά k_D. Δείξτε ότι η κατακόρυφη θέση είναι ασταθής (προφανώς μη-επιθυμητή συμπεριφορά).
(δ) Έστω το ΣΑΕ δίνει ένα γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω, $a_0 = k_P R\phi + k_D R\dot{\phi}$. Βρείτε τι k_P και k_D πρέπει να επιλέξουμε ώστε να επιτευχθεί ο σκοπός και το σύστημα να καταλήγει σε ισορροπία στην θέση $\phi = 0$.

Θέμα 3^o:

Ένα σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια ενός σφαιρικού πλανήτη μάζας M και ακτίνας R.
(α) Σε τι ποσοστό πρέπει να μειωθεί ακαριαία η ταχύτητά του ώστε να προσκρούσει στο έδαφος;
(β) Τι ταχύτητα v_{r0} πρέπει να του προσθέσουμε ακαριαία στην ακτινική διεύθυνση ώστε να προσκρούσει στο έδαφος; Έχει σημασία η φορά της v_{r0};
★ (γ) Βρείτε την γωνία που διαγράφει το διάνυσμα θέσης του σώματος (από το κέντρο του πλανήτη) μέχρι αυτό να προσκρούσει στο έδαφος σε κάθε μία από τις οριακές περιπτώσεις των προηγούμενων ερωτημάτων. Σχεδιάστε τις αντίστοιχες τροχιές.

Θέμα 4^o:

(α) Έστω πλανήτης κινείται κυκλικά γύρω από ένα άστρο. Στα τελευταία στάδια της ζωής του το άστρο χάνει έντονα μάζα μέσω ανέμου. Περιγράψτε ποιοτικά τι επίδραση θα έχει στην ακτίνα της τροχιάς του πλανήτη η ελάττωση της μάζας του άστρου.

(β) Έστω πλανήτης μάζας m κινείται γύρω από άστρο μειούμενης μάζας $M(t)$. Η στροφορμή του είναι L και η απόστασή του από το άστρο αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο, δηλ. ισχύει $r = r_o\,(1 + \lambda t)$ με r_o, λ θετικές σταθερές. Θεωρήστε ότι η μόνη δύναμη που ασκείται στον πλανήτη είναι η βαρυτική από το άστρο, το οποίο είναι σημειακό και ακίνητο.

(β_1) Ποια είναι η μάζα του άστρου σε κάθε χρόνο;

(β_2) Ποια η αζιμουθιακή γωνία $\phi(t)$ της τροχιάς του πλανήτη σαν συνάρτηση του χρόνου; (Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορείτε να θεωρήσετε $\phi = 0$ στον χρόνο $t = 0$.)

(β_3) Ποια η τιμή της γωνίας ϕ σε μεγάλους χρόνους; Σχεδιάστε την τροχιά του πλανήτη για την περίπτωση που ισχύει $L = 6\pi\lambda m r_o^2$.

★ (γ) Έστω η μάζα του ανέμου κατανέμεται έξω από το άστρο με πυκνότητα $\rho = C/r^2$, όπου C σταθερά. Αν όπως πριν ο πλανήτης έχει στροφορμή L και η απόστασή του από το άστρο μεταβάλλεται σαν $r = r_o\,(1 + \lambda t)$, ποια είναι η μάζα του άστρου $M(t)$; Δίνεται η έκφραση της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi}$.

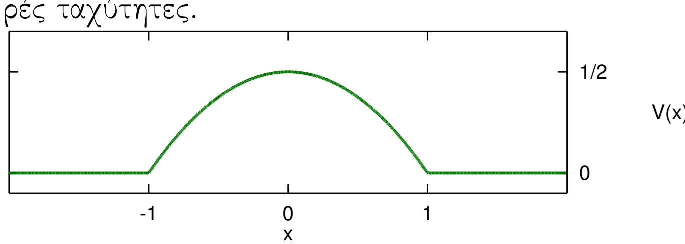
ΛΥΣΕΙΣ:

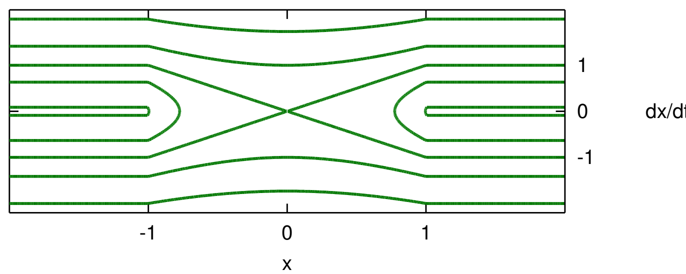
Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

(α) Το ολοκλήρωμα ενέργειας είναι $\frac{v^2}{2} + V(x) = E$ με $E = v_0^2/2$ (χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες στο σημείο $x = -\infty$).
Η επιτρεπτή περιοχή κίνησης είναι $V(x) \leq E$.
Βάσει του γραφήματος της $V(x)$ συμπεραίνουμε ότι:
• Αν $E < 1/2 \Leftrightarrow v_0 < 1$ το σώμα ανακλάται στην αρνητική λύση της εξίσωσης $V(x) = E$, δηλ. στο σημείο $x = -\sqrt{1 - v_0^2}$ και καταλήγει στο $x = -\infty$.
• Αν $E = 1/2 \Leftrightarrow v_0 = 1$ το σώμα πλησιάζει επ' άπειρον το σημείο $x = 0$ στο οποίο το δυναμικό έχει μέγιστο, ίσο με την ενέργεια.
• Αν $E > 1/2 \Leftrightarrow v_0 > 1$ το σώμα περνά το φράγμα και φτάνει στο $x = +\infty$.
(β) Από το ολοκλήρωμα ενέργειας προκύπτει $v = v_0$ για $|x| > 1$ και $v = \sqrt{v_0^2 - 1 + x^2}$ για $|x| < 1$. Στην ελεύθερη κίνηση η ταχύτητα είναι συνεχώς v_0. Επομένως η χρονική διαφορά δημιουργείται στο διάστημα $x \in (-1, 1)$ και είναι $\Delta t = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 1 + x^2}} - \int_{-1}^{1} \frac{dx}{v_0}$. Χρησιμοποιώντας το δοσμένο ολοκλήρωμα με $c = v_0^2 - 1$ βρίσκουμε $\Delta t = \left[\ln\left(\sqrt{x^2 + v_0^2 - 1} + x\right)\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{v_0} = \ln\frac{v_0 + 1}{v_0 - 1} - \frac{2}{v_0}$.
(γ) Για μεγάλες ταχύτητες, θέτοντας $v_0 = 1/\epsilon$ είναι $\Delta t = f(\epsilon) = \ln\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} - 2\epsilon$.
Όπως αναμέναμε ισχύει $f(0) = 0$, δηλ. για άπειρη ταχύτητα δεν υπάρχει χρονική διαφορά.
Αν θέλουμε να βρούμε την μικρή διαφορά πρέπει να αναπτύξουμε την $f(\epsilon)$ κατά Taylor. Είναι $f'(\epsilon) = \frac{2\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}$, $f''(\epsilon) = \frac{4\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^2}$, $f'''(\epsilon) = \frac{4 + 12\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^3}$, επομένως ο πρώτος μη-μηδενικός όρος είναι τρίτης τάξης: $\Delta t \approx f(0) + f'(0)\epsilon + \frac{1}{2}f''(0)\epsilon^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)\epsilon^3 = \frac{2}{3}\epsilon^3$.
Άρα για μεγάλες ταχύτητες είναι $\Delta t \approx \frac{2}{3v_0^3}$.

Γενικά, για κάθε δυναμικό $V(x)$ είναι $\frac{dx}{\dot{x}} - \frac{dx}{v_0} = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2V(x)}} - \frac{dx}{v_0} = \left[\left(1 - \frac{2V(x)}{v_0^2}\right)^{-1/2} - 1\right]\frac{dx}{v_0}$.
Στο όριο των μεγάλων ταχυτήτων v_0 η αγκύλη είναι προσεγγιστικά $\approx \frac{V(x)}{v_0^2}$, επομένως η χρονική διαφορά είναι $\Delta t = \frac{1}{v_0^3}\int_{x_1}^{x_2} V(x)\,dx$.

Για μικρές ταχύτητες (αλλά μεγαλύτερες της μονάδας ώστε $E > 1$ και το σώμα να περνά το φράγμα), θέτοντας $v_0 = 1 + \epsilon$ προκύπτει $\Delta t = \ln\frac{2 + \epsilon}{\epsilon} - \frac{2}{1 + \epsilon}$. Για $\epsilon \to 0$ η χρονική διαφορά απειρίζεται όπως αναμένεται (αφού η ενέργεια πλησιάζει την μέγιστη τιμή του δυναμικού). Είναι $\Delta t \approx \ln\frac{2}{\epsilon} - 2 = \ln\frac{2}{v_0 - 1} - 2$.
(δ) Για $|x| < 1$ έχουμε το κλασικό φασικό διάγραμμα του απωστικού δυναμικού που είναι ανάλογο με το $-x^2$ (με τις υπερβολές, τις ασύμπτωτές τους και το σημείο ισορροπίας), ενώ για $|x| > 1$ έχουμε σταθερές ταχύτητες.





Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

(α) Η προβολή του νόμου Νεύτωνα στο μη αδρανειακό σύστημα με αρχή το Ο $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_0$ (T η δύναμη από την ράβδο) πάνω στο $\hat{\phi}$ δίνει $R\ddot{\phi} = -g\hat{x} \cdot \hat{\phi} - a_0\hat{y} \cdot \hat{\phi} \Leftrightarrow R\ddot{\phi} = g\sin\phi - a_0\cos\phi$.
Για μικρές γωνίες $\sin\phi \approx \phi$ και $\cos\phi \approx 1$ και προκύπτει η ζητούμενη.
(β) Στην γλώσσα των ΣΑΕ (συστημάτων αυτόματου ελέγχου – Automatic Control Systems), αυτό λέγεται αναλογική ανατροφοδότηση (proportional feedback).
$\ddot{\phi} + \left(k_P - \frac{g}{R}\right)\phi = 0$. Οι λύσεις είναι της μορφής $e^{\lambda t}$ με το λ να ικανοποιεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + k_P - \frac{g}{R} = 0$, άρα, $\lambda_\pm = \pm\sqrt{\frac{g}{R} - k_P}$.
Αν $k_P < \frac{g}{R}$ το σύστημα είναι ασταθές (αφού $\lambda_+ > 0$ και το $e^{\lambda_+ t}$ αυξάνει), αν $k_P = \frac{g}{R}$ το σύστημα είναι επίσης ασταθές (αφού $\ddot{\phi} = 0$ και άρα η λύση είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου), ενώ αν $k_P > \frac{g}{R}$ είναι $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{k_P - \frac{g}{R}}$, δηλ. προκύπτουν ταλαντώσεις.
Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφού προσθέτο-

ντας μια δύναμη επαναφοράς το μόνο που μπορούμε να επιτύχουμε είναι να έχουμε συνολική δύναμη επαναφοράς (δηλ. η δύναμη που προσθέσαμε να υπερνικήσει την αρχική απωστική δύναμη).

(γ) Στην γλώσσα των ΣΑΕ αυτό λέγεται διαφορική ανατροφοδότηση (derivative feedback).

$\ddot{\phi} + k_D\dot{\phi} - \frac{g}{R}\phi = 0$. Οι λύσεις είναι της μορφής $e^{\lambda t}$ με το λ να ικανοποιεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + k_D\lambda - \frac{g}{R} = 0$, άρα, $\lambda_\pm = -\frac{k_D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_D}{2}\right)^2 + \frac{g}{R}}$.

Η λύση λ_+ είναι θετική για οποιαδήποτε τιμή του k_D, οπότε το σύστημα είναι ασταθές.

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφού το ότι προσθέσαμε δύναμη απόσβεσης (ανάλογη της ταχύτητας) δεν αλλάζει την φύση της δύναμης που είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και στην οποία οφείλεται η αστάθεια, η οποία παραμένει απωστική.

(δ) Αυτή είναι αναλογική και διαφορική ανατροφοδότηση (proportional plus derivative feedback).

$\ddot{\phi} + k_D\dot{\phi} + \left(k_P - \frac{g}{R}\right)\phi = 0$. Οι λύσεις είναι της μορφής $e^{\lambda t}$ με το λ να ικανοποιεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + k_D\lambda + k_P - \frac{g}{R} = 0$, άρα, $\lambda_\pm = -\frac{k_D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_D}{2}\right)^2 - k_P + \frac{g}{R}}$.

Για $k_D > 0$ και $k_P > \frac{g}{R}$ το πραγματικό μέρος των $\lambda_\pm$ είναι αρνητικό, οπότε το σώμα καταλήγει στο $\phi = 0$. Αυτή είναι η επιθυμητή συμπεριφορά.

Αν $k_P > \left(\frac{k_D}{2}\right)^2 + \frac{g}{R}$ είναι $\lambda_\pm = -\frac{k_D}{2} \pm i\omega$ με $\omega = \sqrt{-\left(\frac{k_D}{2}\right)^2 + k_P - \frac{g}{R}}$, οπότε έχουμε περίπτωση ασθενούς απόσβεσης και προκύπτουν φθίνουσες ταλαντώσεις $\phi = Ce^{-(k_D/2)t}\sin(\omega t + D)$.

Αν $\frac{g}{R} < k_P < \left(\frac{k_D}{2}\right)^2 + \frac{g}{R}$ έχουμε περίπτωση ισχυρής απόσβεσης, δηλ. τα $\lambda_\pm$ είναι πραγματικοί, αλλά αρνητικοί αριθμοί, οπότε η λύση είναι επαλληλία των εκθετικών $e^{\lambda_\pm t}$ που και τα δύο φθίνουν.

Αν $k_P = \left(\frac{k_D}{2}\right)^2 + \frac{g}{R}$ έχουμε περίπτωση κρίσιμης απόσβεσης και $\phi = (Ct + D)e^{-(k_D/2)t}$. Σε αυτή την περίπτωση η επαναφορά στην θέση ισορροπίας επιτυγχάνεται γρηγορότερα.

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφού αφενός η προσθήκη της δύναμης που είναι ανάλογη της απομάκρυνσης μπορεί να υπερνικήσει την απωστική κάνοντας το σημείο ευσταθές, αφετέρου η δύναμη απόσβεσης αποσβένει τις ταλαντώσεις και οδηγεί σε ισορροπία.

Θέμα 3ο:

Το σώμα εκτελεί κυκλική τροχιά, άρα $\frac{v_0^2}{R+h} = \frac{GM}{(R+h)^2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$.

(α) Μπορεί να πέσει στον πλανήτη, αν η ακτίνα r_π του περίκεντρου της τροχιάς του είναι μικρότερη της ακτίνας του R. Στην οριακή περίπτωση $r_\pi = R$ και $r_\alpha = R + h$ (αρχική θέση). Η διατήρηση στροφορμής και ενέργειας μεταξύ αυτών των δύο σημείων δίνουν $Rv_\pi = (R+h)v_\alpha$ και $\frac{v_\pi^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_\alpha^2}{2} - \frac{GM}{R+h}$. Απαλείφοντας την v_π βρίσκουμε $v_\alpha = \sqrt{\frac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}}$.

Το ίδιο απαιτώντας για το ενεργό δυναμικό να είναι $V_{\text{eff}}(R+h) = V_{\text{eff}}(R) \Leftrightarrow \frac{L^2}{2m(R+h)^2} - \frac{GMm}{R+h} = \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} \Leftrightarrow L = \sqrt{\frac{2GMm^2R(R+h)}{2R+h}}$ και $v_\alpha = \frac{L}{m(R+h)}$.

Προφανώς και για μικρότερες το σώμα θα πέσει στο έδαφος.

Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με ανισότητες: Αν το περίκεντρο έχει ακτίνα r_π τότε η διατήρηση ενέργειας και στροφορμής μεταξύ περίκεντρου–απόκεντρου δίνουν $\frac{v_\pi^2}{2} - \frac{GM}{r_\pi} = \frac{v_\alpha^2}{2} - \frac{GM}{R+h}$ και $r_\pi v_\pi = (R+h)v_\alpha$. Απαλείφοντας την v_π βρίσκουμε $v_\alpha = \sqrt{\frac{2GM/(R+h)}{1+(R+h)/r_\pi}}$ από την οποία φαίνεται ότι η v_α είναι αύξουσα συνάρτηση του r_π. Για να είναι $r_\pi \leq R$ πρέπει $v_\alpha \leq \sqrt{\frac{2GM/(R+h)}{2+h/R}}$.

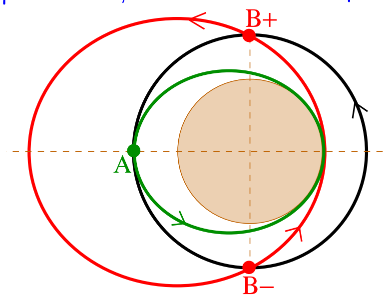
Το ελάχιστο ποσοστό μείωσης της ταχύτητας είναι $\frac{v_0 - v_\alpha}{v_0} = 1 - \sqrt{\frac{2R}{2R+h}}$.

(β) Η στροφορμή δεν αλλάζει, παραμένει $L = m(R+h)v_0 = \sqrt{GMm^2(R+h)}$. Οριακά το περίκεντρο έχει $r_\pi = R$ και η ταχύτητα εκεί είναι $v_\pi = \frac{L}{mr_\pi} = \sqrt{\frac{GM(R+h)}{R^2}}$. Η διατήρηση ενέργειας δίνει $\frac{v_\pi^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_0^2 + v_{r0}^2}{2} - \frac{GM}{R+h} \Leftrightarrow |v_{r0}| = \frac{h}{R}v_0$.

Το ίδιο απαιτώντας η ενέργεια να είναι ίση με την τιμή του ενεργού δυναμικού στην ακτίνα R, δηλ. $E = \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R}$ με $E = \frac{m(v_0^2 + v_{r0}^2)}{2} - \frac{GMm}{R+h}$ και $L = m(R+h)v_0$.

Προφανώς για μεγαλύτερες τιμές του μέτρου της

ακτινικής ταχύτητας, δηλ. για μεγαλύτερες ενέργειες, το σώμα θα πέσει στο έδαφος.
Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με ανισότητες: Αν το περίκεντρο έχει ακτίνα r_π η ταχύτητα εκεί είναι $v_\pi = \dfrac{L}{mr_\pi} = \dfrac{\sqrt{GM(R+h)}}{r_\pi}$ και η διατήρηση ενέργειας μεταξύ περίκεντρου–απόκεντρου δίνει $\dfrac{v_\pi^2}{2} - \dfrac{GM}{r_\pi} = \dfrac{v_0^2 + v_{r0}^2}{2} - \dfrac{GM}{R+h} \Leftrightarrow v_{r0} = v_0 \left|\dfrac{R+h}{r_\pi} - 1\right|$. Για να είναι $r_\pi \leq R$ πρέπει $|v_{r0}| \geq v_0 \dfrac{h}{R}$.
Για την τιμή της ακτίνας του περίκεντρου δεν έχει σημασία η φορά της ακτινικής ταχύτητας που προσθέτουμε. Όμως αν $v_{r0} > 0$ και η ενέργεια είναι θετική το σώμα θα απομακρύνεται συνεχώς από το περίκεντρο της τροχιάς και δεν θα επιστρέψει ποτέ στον πλανήτη. Η συνθήκη $E < 0 \Leftrightarrow \dfrac{m(v_0^2 + v_{r0}^2)}{2} - \dfrac{GMm}{R+h} < 0$ ισοδυναμεί με $|v_{r0}| < v_0$. Συγκρίνοντας με την συνθήκη $|v_{r0}| > v_0 \dfrac{h}{R}$ που έχουμε βρει (από την απαίτηση το περίκεντρο να έχει ακτίνα μικρότερη του R), συμπεραίνουμε ότι:
• αν $h \geq R$ πρέπει να δώσουμε αρνητική v_{r0} στο σώμα για να πέσει στο έδαφος (αν δώσουμε θετική το σώμα θα διαφύγει)
• αν $h < R$, για να πέσει το σώμα στο έδαφος πρέπει να δώσουμε είτε αρνητική v_{r0} με μέτρο $|v_{r0}| > v_0 \dfrac{h}{R}$ ή θετική με μέτρο $v_0 \dfrac{h}{R} < |v_{r0}| < v_0$.
(γ) Για το ερώτημα (α) προφανώς $\Delta\phi = \pi$ γιατί κινείται από το απόκεντρο στο περίκεντρο.
Η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_\pi)}$. Απαιτώντας $r_\pi = R \Leftrightarrow \dfrac{p}{1+\varepsilon} = R$ και $r_\alpha = R+h \Leftrightarrow \dfrac{p}{1-\varepsilon} = R+h$, βρίσκουμε $p = 2R\dfrac{R+h}{2R+h}$ και $\varepsilon = \dfrac{h}{2R+h}$.
Για το ερώτημα (β) είναι $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_\pi)}$ με $p = \dfrac{L^2}{GMm^2} = R+h$, οπότε θεωρώντας $\phi = 0$ στην αρχική θέση $r = R+h$ βρίσκουμε $\cos\phi_\pi = 0$, δηλ. $\phi_\pi = \pi/2$ ή $3\pi/2$.
Η πρώτη τιμή αντιστοιχεί σε αρνητική $\dot{r}$, δηλ. το σώμα βρίσκεται $\pi/2$ πριν το περίκεντρο (και η απόσταση από το κέντρο μειώνεται) οπότε θα διαγράψει γωνία $\Delta\phi = \pi/2$ μέχρι να φτάσει στο περίκεντρο.
Η δεύτερη τιμή αντιστοιχεί σε θετική $\dot{r}$ οπότε θα διαγράψει γωνία $\Delta\phi = 3\pi/2$ μέχρι να φτάσει στο περίκεντρο.
Η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{R+h}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_\pi)}$ με εκκεντρότητα $\varepsilon = h/R$ ώστε $r = R$ για $\phi = \phi_\pi$.



Στο σχήμα η μαύρη κυκλική τροχιά είναι η αρχική. Η πράσινη (μικρή έλλειψη) αντιστοιχεί στο (α) ερώτημα – η ελάττωση της ταχύτητας γίνεται στο σημείο A. Η κόκκινη (μεγάλη έλλειψη) αντιστοιχεί στο (β) ερώτημα, για $h < R$. Η πρόσθεση θετικής v_r συμβαίνει στο σημείο B+, ενώ η πρόσθεση αρνητικής v_r συμβαίνει στο σημείο B-. Αν $h = R$ ή $h > R$ η κόκκινη τροχιά πρέπει να αντικατασταθεί με παραβολή ή υπερβολή αντίστοιχα, δηλ. δεν κλείνει προς τα αριστερά, αλλά μεταξύ των B- και B+ είναι όμοια με την κόκκινη τροχιά του σχήματος. Στις περιπτώσεις αυτές $h \geq R$ για να πέσει το σώμα στο έδαφος πρέπει να του προσθέσουμε αρνητική v_r στο σημείο B-.
Το ερώτημα (γ) θα μπορούσε να απαντηθεί και επιλύοντας την εξίσωση τροχιάς $u'' + u = \dfrac{GMm^2}{L^2}$ με αρχικές συνθήκες $\phi = 0$, $u = \dfrac{1}{r}$, $u' = \dfrac{d(1/r)}{d\phi} = -\dfrac{\dot{r}}{r^2\dot{\phi}} = -\dfrac{mv_r}{L}$ και $L = mrv_\phi$. (Θεωρώντας όπως πριν $\phi = 0$ στην αρχική θέση και όχι στο περίκεντρο της τροχιάς που δεν ξέρουμε εκ των προτέρων που είναι.)
Για το ερώτημα (α) οι αρχικές συνθήκες είναι $r = R+h$, $v_r = 0$, $v_\phi = \sqrt{\dfrac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}}$, οπότε $L = mrv_\phi = \sqrt{\dfrac{2GMm^2R(R+h)}{2R+h}}$ και η εξίσωση τροχιάς είναι $u'' + u = \dfrac{2R+h}{2R(R+h)}$. Η γενική λύση είναι $u = \dfrac{2R+h}{2R(R+h)}(1 + C_1\cos\phi + C_2\sin\phi)$ και οι αρχικές συνθήκες $u|_{\phi=0} = \dfrac{1}{R+h}$, $u'|_{\phi=0} = 0$ (αφού $v_r = 0$ αρχικά) δίνουν $C_1 = -\dfrac{h}{2R+h}$ και $C_2 = 0$. Άρα η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \dfrac{2R(R+h)}{2R+h-h\cos\phi}$.
Η αρχική θέση $\phi = 0$ αντιστοιχεί στην μέγιστη απόσταση $r = R+h$. Το σώμα φτάνει στην ελάχιστη απόσταση $r = R$ (πρόσκρουση με το έδαφος)

για $\phi = \pi$, δηλ. αφού το διάνυσμα θέσης διαγράφει γωνία $\Delta\phi = \pi$ από την αρχική θέση $\phi = 0$.
Για το ερώτημα (β) οι αρχικές συνθήκες είναι $r = R + h$, $v_r = \pm\frac{h}{R}v_0$ με $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$, $v_\phi = v_0$, οπότε $L = mrv_\phi = \sqrt{GMm^2(R+h)}$ και η εξίσωση τροχιάς είναι $u'' + u = \frac{1}{R+h}$. Η γενική λύση είναι $u = \frac{1}{R+h}(1 + D_1\cos\phi + D_2\sin\phi)$ και οι αρχικές συνθήκες $u|_{\phi=0} = \frac{1}{R+h}$, $u'|_{\phi=0} = -\frac{mv_r}{L} = \mp\frac{h}{R(R+h)}$ δίνουν $D_1 = 0$ και $D_2 = \mp\frac{h}{R}$. Άρα η εξίσωση τροχιάς είναι $r = \frac{R+h}{1 \mp \frac{h}{R}\sin\phi}$. Για το πάνω πρόσημο που αντιστοιχεί σε θετική v_{r0}, εφόσον $h < R$ και η τροχιά είναι ελλειπτική, το σώμα φτάνει στην ελάχιστη απόσταση $r = R$ (πρόσκρουση με το έδαφος) για $\phi = 3\pi/2$, δηλ. αφού το διάνυσμα θέσης διαγράφει γωνία $\Delta\phi = 3\pi/2$ από την αρχική θέση $\phi = 0$. Όμοια για το κάτω πρόσημο που αντιστοιχεί σε αρνητική v_{r0}, το σώμα φτάνει στην ελάχιστη απόσταση $r = R$ για $\phi = \pi/2$, δηλ. αφού το διάνυσμα θέσης διαγράφει γωνία $\Delta\phi = \pi/2$.

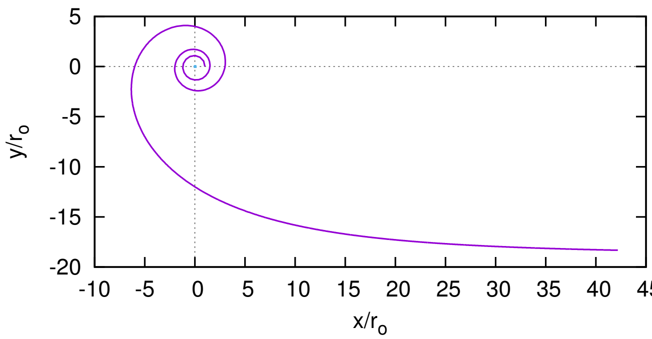
Θέμα 4^o:

(α) Αρχικά η επιτάχυνση της βαρύτητας ισούται με την κεντρομόλο που απαιτείται ώστε ο πλανήτης να κινείται κυκλικά. Αν η μάζα του άστρου μειώνεται η μειωμένη βαρύτητα δεν επαρκεί για να κρατήσει τον πλανήτη στην κυκλική τροχιά και άρα η ακτίνα τροχιάς θα αυξάνεται.
Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και αν σκεφτούμε τις δυνάμεις στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς. Η μειωμένη βαρύτητα είναι μικρότερη της φυγόκεντρου, κάτι που οδηγεί σε αύξηση της ακτίνας τροχιάς.

(β_1) Ο νόμος Νεύτωνα δίνει $m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$ και $mr^2\dot{\phi} = L =$ σταθερά. Απαλείφοντας το $\dot{\phi}$ και αντικαθιστώντας την δοσμένη $r(t) = r_o(1+\lambda t)$ προκύπτει $M = \frac{L^2}{Gm^2 r_o(1+\lambda t)}$.

(β_2) Από το ολοκλήρωμα στροφορμής $\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr_o^2(1+\lambda t)^2} \Leftrightarrow \int_0^\phi d\phi = \int_0^t \frac{L}{mr_o^2(1+\lambda t)^2}dt = \left[-\frac{L}{mr_o^2\lambda(1+\lambda t)}\right]_0^t \Leftrightarrow \phi = \frac{L}{mr_o^2}\frac{t}{1+\lambda t}$.

(β_3) Σε μεγάλους χρόνους $\phi \to \phi_\infty = \frac{L}{mr_o^2}\frac{1}{\lambda}$.
Η τροχιά γίνεται ασυμπτωτικά ευθύγραμμη, κάτι που είναι αναμενόμενο αφού σε μεγάλους χρόνους η μάζα του άστρου θεωρητικά μηδενίζεται και άρα δεν ασκείται δύναμη στον πλανήτη. Βέβαια η διαδικασία μείωσης της μάζας του άστρου δεν συνεχίζεται μέχρι μηδενισμού της, αλλά αυτό δεν μας ενδιαφέρει εδώ.
Αν $L = 6\pi\lambda m r_o^2$ είναι $\phi_\infty = 6\pi$.
Η τροχιά είναι σε παραμετρική μορφή (με παράμετρο τον χρόνο) $r = r_o(1+\lambda t)$ και $\phi = 6\pi\frac{\lambda t}{1+\lambda t}$.



Σε μεγάλους χρόνους $x = \lim_{t\to\infty} r\cos\phi = +\infty$ και $y = \lim_{t\to\infty} r\sin\phi = \lim_{t\to\infty}\frac{\sin\phi}{1/r} \overset{0/0}{=} -\lim_{t\to\infty}\frac{r^2\dot{\phi}\cos\phi}{\dot{r}} = -6\pi r_o$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hôpital.
Αλλιώς: $r\sin\phi = r\sin(\phi - 6\pi) \approx r(\phi - 6\pi)$ διότι $|\phi - 6\pi| \ll 1$. Αντικαθιστώντας $r = r_o(1+\lambda t)$ και $\phi - 6\pi = 6\pi\frac{\lambda t}{1+\lambda t} - 6\pi = -\frac{6\pi}{1+\lambda t}$ προκύπτει $r\sin\phi = -6\pi r_o$.

(γ) Ο πλανήτης δέχεται βαρυτική δύναμη από το άστρο και την κατανομή μάζας του ανέμου. Αφού η κατανομή είναι σφαιρικά συμμετρική το άθροισμα είναι η κεντρική δύναμη $-\frac{GM_{\varepsilon\gamma\kappa}m}{r^2}$ όπου $M_{\varepsilon\gamma\kappa}$ είναι το άθροισμα της μάζας του άστρου M και της μάζας του ανέμου που βρίσκεται εντός της σφαίρας με ακτίνα ίση με την απόσταση του πλανήτη από το κέντρο σε κάθε χρόνο, δηλ. $\int_0^r \rho\, 4\pi r^2 dr = \int_0^r C\, 4\pi dr = C\, 4\pi r$ (η ελάχιστη ακτίνα είναι μηδενική διότι το άστρο θεωρείται σημειακό).
Ο νόμος Νεύτωνα δίνει $m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{GM_{\varepsilon\gamma\kappa}m}{r^2}$ και $mr^2\dot{\phi} = L =$ σταθερά. Απαλείφοντας το $\dot{\phi}$ και αντικαθιστώντας την δοσμένη $r(t)$ προκύπτει $M_{\varepsilon\gamma\kappa} = \frac{L^2}{Gm^2 r_o(1+\lambda t)}$. Άρα η μάζα του άστρου είναι $M = \frac{L^2}{Gm^2 r_o(1+\lambda t)} - C\, 4\pi r_o(1+\lambda t)$.